Ensino positivista.

Logica

1º anno — 109 (1897)

Calculo arimetico

1ª Lição.

Concepção geral da Logica; plano do seu estudo; donde apreciação do lugar que ocupa a arimetica no conjunto do saber humano.

I

Concepção geral da Logica

1 — Objeto e plano desta lição.

A nossa conclusão do estudo da Filozofia Primeira levou-nos a reconhecer a necessidade de uma apreciação analitica do dogma, afim de que a inteligencia pudesse preencher a indispensavel missão que lhe compete no conjunto da Religião. Constatando, porem, semilhante necessidade, apontamos

os perigos inherentes á preparação de que se trata e indicamos summariamente as cautelas unicas que pódem resguardar-nos deles. Todas essas cautelas rezumião-se em velar pelo surto continuo do altruismo durante a iniciação teorica e a vida pratica; já mediante o dezenvolvimento do culto, intimo e publico, sempre começo com a cultura estetica, já fazendo realçar as reações altruistas que a mesma iniciação teorica e a mesma vida pratica comportão quando convenientemente instituidas. Foi a essa destinação que ligamos a apreciação dos diversos modos analiticos que composta a jerarchia teorica. E, entrando no exame especial desses modos, fizemos ver que a melhor combinação entre o ponto de vista historico e o ponto de vista dogmatico consistia na progressão Logica, Fizica, e Moral.

Hoje vamos começar essa longa e dificil preparação analitica que tantos sacrificios custou á Humanidade. A contemplação de tão tormentozo passado nos deve tornar atentos ás dificuldades que o Grão Ser conseguiu superar, indicando-nos os perigos que nos esperão. Mas a vitoria mesma da Humanidade nos mostra de antemão que esses perigos não são superiores ás potencias do altruismo. E devemos tanto mais sentir a nossa responsabilidade pelos extravios e quedas em que incorrermos, quanto já não se trata de uma evolução espontanea, com todas as ciladas do desconhecido. Pelo contrario, temos apenas de percorrer uma senda que os trabalhos das gerações passadas nos aplanárão de modo a permitir-nos desvendar em qualquer de seus pontos a incomparavel felicidade reservada a um futuro cuja aproximação só de nós depende.

Recordando-vos essas ponderações, temos por fim patentear-vos quanto urge, antes de abordar o exame especial de qualquer das multiplas questões que teremos de considerar, quanto urge, digo, compenetrarmo-nos de suas relações com o destino religiozo que constitue o objeto direto de todos os nossos esforços. Semilhante regra nos mostra logo a necessidade de consagrar a nossa primeira lição de <u>Logica</u> á apreciação das suas conexões precizas com o conjunto das exigencias humanas.

Todas essas conexões se rezumem na serie de considerações que levarão nosso Mestre a dezignar por tal denominação a sciencia que estuda a existencia reduzida aos atributos universaes, <u>numero</u>, <u>extensão</u>, e <u>movimento</u>. Ora,

essas considerações não podem ser convenientemente apreciadas sem que examinemos sucessivamente: 1º Qual deve ser a concepção normal da _Logica_, tomando esse termo no sentido vulgar, isto é, como o estudo das condições normaes da atividade peculiar á Inteligencia; 2º Qual deve ser a concepção normal da sciencia destinada a dar-nos a apreciação da existencia universal; 3º a necessidade de conceber a Logica, considerada em abstrato, como identificada com essa apreciação.

2 – Definição normal da Logica.

A Logica, isto é, o exercicio normal da inteligencia consiste no concurso normal dos sentimentos, das imagens e dos sinais, para nos inspirar as concepções que convêm ás nossas necessidades moraes, intelectuaes e fisicas.

Comparação dessa definição com o enunciado primitivo de nosso Mestre:

Concurso dos sentimentos, das imagens e dos sinaes para _desvendar_ _as verdades_ que nos convêm.

A aplicação dessa definição exige:

Apreciação dos meios logicos
" do fim da Logica

Apreciação da marcha logica.

Apreciação sintetica do concurso dos meios com o fim e os metodos.

3 – Apreciação dos meios logicos.

Logica dos sentimentos
" das imagens
" dos sinais.

Evolução –

Fetichismo – sentimento conduzindo á construção.
Politeismo – Imagens – Indução.
Monoteismo – Sinais – Dedução.
Pozitivismo – sistematização dos trez:
teoria cerebral. –

Coordenação dos meios logicos –

Fetichismo – sentiu
Teocracia – respeitou
Transição Ocidental – desconheceu e tendeu a reduzir aos sinais.
Tentativa catolica.
Pozitivismo:
Distinção { egoismo.
altruismo.

Comparação com a unidade religiosa.
Confirmação desta teoria na constituição da Sintese Subjetiva.
4– Apreciação do fim da Logica.
Disciplinar a inteligencia.
teoria –
pratica –
Vicios da construção anterior ao positivismo, sob esse duplo aspeto.
Construção positivista:
Impossibilidade de disciplinar a inteligencia antes do positivismo.
Necessidade do ponto de vista religioso: Entre o Homem e o Mundo é preciso a Humanidade.
Preponderancia do sentimento para dignidade e racionalidade do exercicio mental. Carater social da logica.
Espaço, Terra e Humanidade.
Duplo aspeto – { sciencia / e arte (poesia)
destinadas ambas ao culto.
Superioridade da arte.
Cultivo da logica –

fase preparatoria (infancia, adolescencia)
Virilidade:
Culto intimo.
Progresso da submissão.
5– Apreciação do metodo.
Necessidade da evolução p.ª revelar o metodo.
Distinção entre o metodo { subjetivo / sintese } e o { objetivo / analyse }
Dedução – Descartes
Indução – Descartes e Bacon
Construção – Augusto Comte.
Papel da evolução scientifica.
Papel da poesia – influencia feminina
Papel do culto pratico.
Idade Media – cultura do altruismo. Situação contraditoria.
Induzir para deduzir afim de construir.
Influencia da Sociologia.
Clotilde.

Confrontos entre a jerarchia logica e a jerarchia teorica
metodo poetico.

6 – Apreciação sintetica do concurso dos metodos com os meios e os fins.

meios e metodos.

meios, metodos e fins.

Comparação com a Trindade.

7 – Concluzão.

Apreciação da unidade logica – subordinação dos sinais ás imagens e destas ao sentimento.

Convergencia dos fins. Siencia e Arte.

Convergencia dos metodos.

rezumo: ascendente da vida subjetiva.

Fetichismo – Teologismo – Pozitivismo.

Confronto com a unidade religioza:

Convergencia dos trez elementos da Trindade.

Necessidade da supremacia manifesta do sentimento na constituição da Sintese.

Concepção da gerarchia teorica que dali resulta:

Siencia do Espaço. Logica
Siencia da Terra. Fisica
Siencia da Humanidade. moral

Duplo aspeto da Siencia do Espaço =

Leis Universais – Filozofia Primeira

Existencia reduzida aos atributos universais } Matematica.

Na Filozofia Primeira: concepção sintetica do dogma

Na Matematica – { Logica. Doutrina.

—

Antes, porem, caracterizemos a concepção da Matematica.

II

Concepção da Matematica.

1 – Circumscripção do dominio matematico.

Antes do Pozitivismo. Condorcet.

Augusto Comte – { Faze Filozofica / Faze religioza

Medida indireta das grandezas – determinar umas por meio das outras, em virtude das relações precizas

que existem entre ellas.

2 anos bastão para o ensino filosofico — ponto de vista deste curso

Comparação com a jerarchia da Moral.

2 – Primeira divizão: entre a parte abstrata e a parte concreta.

Segunda: apreciação especial do calculo

calculo arimetico

calculo algebrico.

3 – Apreciação do calculo algebrico

Dupla origem { arimetica — equação; geometria — proporção }

A decomposição do calculo é condição indispensavel á coordenação da matematica.

4 – Apreciação da Geometria Especial.

Distinção entre a Geometria antiga e a moderna.

5 – Concepção da Geometria Geral.

6 – Concepção da Mecanica.

7 – Concluzão. Coordenação.

Subordinação á Moral.

Subordinação á Fizica.

III

Identificação da Logica com a Matematica.

1 – Duplo aspeto logico e dogmatico de toda siencia.

Matematica sob esse duplo aspeto.

Fizica idem

Moral.

2 – Preponderancia do ponto de vista logico nas siencias preparatorias.

3 – Comparação entre a Matematica e a Fizica sob esse aspeto.

4 – Insuficiencia Logica da Matematica.

5 – Possibilidade de reparar essa insuficiencia

6 – Condição em que é iniciado o estudo da Matematica que torna preponderante o seu carater logico.

7 – Concluzão.

De

Raymundo Teixeira Mendes
42 - Rua Benjamin Constant.

Ensino positivista.

Logica

Calculo arimetico
2ª Lição.

Teoria geral das concepções numericas.

I

Advento subjetivo das concepções numericas.

1 – Objeto e plano desta lição.

As considerações apresentadas na ultima lição determinando a posição que o *calculo arimetico* ocupa no conjunto do dogma positivo estabeleceram ao mesmo tempo as condições em que vamos estuda-lo. Caraterizando, porem, semelhante calculo, nós o fizemos pelo contraste que ele oferece com o calculo algebrico. O calculo arimetico é o *calculo dos valores*, dissemos, ao passo que o calculo algebrico é o *calculo das relações*. Ora,

esse confronto é feito tendo em vista a *destinação objetiva* do calculo arimetico e sem referencia aos seus *usos subjetivos*. Dahi resulta que, por meio dele distingue-se bem os dois aspetos do calculo; mas sem definir suficientemente o calculo arimetico. Senti-se melhor semelhante lacuna, notando que a distinção entre os dois aspetos no calculo só se apresenta depois de um considerabilissimo surto das concepções numericas. Antes mesmo de qualquer *calculo*, isto é, antes mesmo que o desenvolvimento social desse lugar á *avaliações* mediante a combinação dos *numeros*, já estes tinhão surgido e dominavão o conjunto da existencia humana e portanto o conjunto dos pensamentos humanos. E sem estudar estas manifestações iniciais do genio teorico da nossa especie é impossivel comprehender o seu surto abstrato e especialmente scientifico.

Estas reflexões já mostrão a necessidade de abordar o estudo do calculo arimetico circunscrevendo o seu campo proprio, melhor do que o fizemos em nossa lição passada. Mas esse não foi o unico aspeto sob o qual a nossa deter-

minação do calculo arimetico foi omissa.

Com efeito, para ter uma idéia nitida, precisa e organica desse primeiro termo da *Logica*, é necessario apresentar um quadro geral das concepções que ele abraça e segundo o qual ele deve ser estudado. Em uma palavra, é necessario indicar o *plano* do calculo arimetico.

Tal vae ser o objeto de nossa lição de hoje. Começaremos, pois, 1º apreciando o advento subjetivo das concepções numericas; 2º indicaremos depois a sua transformação objetiva de que *resultou* o surto teorico; 3º e concluiremos condensando no plano do calculo arimetico, o conjunto dos seus atributos.

2 – Recordação da origem subjetiva das concepções humanas, conforme se viu em Filosofia Primeira. (F.P.)

O homem é o resumo do mundo; mas para comprehender todo o alcance desta antiquissima observação convem ter presente que o homem deve ser considerado no ponto de vista *moral* e não no simples aspeto *biologico*. Porque é só encarando

o homem como o produto e o agente da Humanidade que se póde considera-lo como um mundo em miniatura.

A vista disto não deve admirar que a contem= plação do homem e a ação sobre o homem fôsse a fonte de todas as concepções humanas. Nenhum assunto póde despertar mais a atenção do homem do que o proprio homem, nenhum póde-lhe ser mais bem conhecido. Era, portanto, fatal que os primeiros conhecimentos resultassem da contempla= ção de nossa natureza. Em segundo lugar, o ente sobre o qual mais interessa agir sendo o homem, foi sobre o homem que se verificou primeiro a eficacia das meditações humanas. Depois de longamente experimentar sobre si, foi que a Humanidade procurou aplicar as suas concepções ao Mundo. Tal é a marcha que se verifica em todo o decurso da evolução teorica; por hoje devemos aprecia-la quanto ás concepções numericas.

3 – Explicação do predominio habitual do ponto de vista objetivo e especial na apreciação das concepções nu= mericas.

Quando se fala em <u>numero</u>, o nosso pensamento volta-se para o conjunto de noções abstratas espe= ciais por meio das quaes a Humanidade fixou a concepção das diversas grandezas. Assim tambem a palavra <u>calculo</u> nos recorda logo as especulações sobre essas noções, apezar de ser usada algumas vezes como sinonimo de raciocinio. Semilhante habito não nos permite apanhar todo o alcance das concepções numericas, e não nos deixa per= ceber como tais concepções poderão surgir. Antes de retifica-lo, porem, é preciso explica-lo. Ele re= sulta da surpreendente aplicação que os nume= ros tiverão no estudo da ordem exterior, sobretudo quanto á investigação das leis abstratas da extensão e do movimento bem como a sua utilização na teo= ria do Ceo. Semilhante expansão objetiva fez com que os ocidentaes esquecessem a verdadeira filia= ção das concepções numericas. A consequencia é que essas concepções perderão a nitidez e tor= narão-se confusas ao mesmo tempo que se extinguia o sentimento de sua dignidade.

A iniciação do individuo reproduzindo a da

especie, cada criança renova a tocante evolução pela qual a Humanidade elevou-se gradualmente da *animalidade* primitiva á *moralidade* final. Uma observação criterioza vê então despontarem as concepções numericas e póde desvendar o seu verdadeiro carater inicial. Mas em breve a educação sistematica altera este surto espontaneo e a criança perde o sentimento ingenuo de suas debeis construções mentais. As concepções numericas, como todos os outros resultados do fetichismo inicial, são afogados por um surto teorico e pratico tornado cada vez mais objetivo. E'assim que os ocidentaes estreitão rapidamente os seus pensamentos, não vendo nas noções mais universalmente empregadas sinão concepções especialissimas.

4- Correcção de semilhante tendencia mediante o exame sumario da linguagem sob o aspeto numerico.

Para corrigir semilhante tendencia, cujas devastações moraes são incomparavelmente maiores do que os seus prejuizos mentaes, e praticos, que alias são imensos, convem mostrar diretamente

a universalidade das concepções numericas, mediante o exame sumario da linguagem humana.

Nesse intuito cumpre notar, em primeiro logar que as concepções numericas dominão toda a constituição da linguagem humana. Com efeito, toda linguagem apresentando dois tipos de palavras, umas que são *variaveis*, e outras que são *invariaveis*, é facil de reconhecer que uma das fontes de variação provem justamente do acidente numerico. Assim a variação dos substantivos, dos adjetivos, e dos verbos está subordinada á distinção entre a *unidade* ou *singularidade* e a *coletividade* ou *pluralidade*. Essa distinção domina mesmo a que resulta da separação entre os *sexos*; pois que ela se encontra em palavras nas quaes semilhante separação não se traduz. Ora essa distinção está ligada á diferença entre a *personalidade* e a *sociabilidade*. O que mostra que as concepções numericas se filião a nossa constituição afetiva.

Uma especie que não tem altruismo não póde elevar-se á noção de coletividade.

Para convencerem-se da força desta observação convem notar que nossas ideias têm um carater concreto antes de se tornarem abstratas. A noção de pluralidade ou coletividade é hoje abstrata, pois que indica um grupamento sem mesmo supôr que os elementos grupados se achão ligados por qualquer fórma. Mas a ideia primitiva de pluralidade resultou da contemplação de entes distintos, porem ligados. Ora, essa noção é irredutivel; mas só a adquirimos porque temos consciencia da nossa ligação com os outros entes, e essa consciencia supõe o altruismo. Para os animaes egoistas tudo é diconexo: só existem individuos. Isto é confirmado pelas dificuldades que a personalidade opõe aos sentimento e á concepção das relações sociaes.

Mas certas palavras variaveis revelão ainda um grau mais profundo e mais especial desse predominio das concepções numericas. Assim os pronomes, os adjetivos possessivos e os verbos marcão nas linguas modernas o ascendente universal dos trez primeiros numeros. Tu e seus derivados contem implicitamente a ideia de dois, como ele e seus derivados contem a de trez.

Considerando-se as fazes teologicas e fetichicas da evolução ainda mais se patenteia essa constituição numerica da linguagem humana. Com efeito, nos idiomas modernos, só se percebe em geral a distinção entre o singular e o plural, entre um e muitos. Mas nas linguas teocratas e mesmo nas linguas militares que forão elaboradas sob um predominio suficiente das castas sacerdotaes, como o grego, se encontra tambem o dual. De sorte que nesses idiomas 2 tem tantas representações quantos são os termos variaveis da lingua. Afirma-se mesmo que certas linguas têm um trial. Mas em geral 3 e muitos confundem-se.

Ora, a existencia do trial bem como a sua confusão com o plural está de acordo com o fato de ser 3 o limite da contagem abstrata espontanea, conforme o demonstra a observação dos animaes, confirmada pela da Humanidade. Esta ignora com efeito, durante longos seculos mesmo o numero abstrato 4. Não é, porem, agora ocazião de in=

sistir neste ponto. Continuemos a examinar a constituição da linguagem comum sob o aspeto numerico.

O fato das linguas modernas terem eliminado o dual e o trial não denota um decrescimento das considerações numericas. Porque esse desuso resultou simplesmente da faculdade que a serie numerica oferece para precisar todos os graus da pluralidade. Desde então as linguas modernas puderão simplificar-se limitando-se a manter a distinção entre a personalidade e a sociabilidade, o singular e o plural, ficando entretanto mais perfeitas do que as antigas.

O culto do altruismo contribuiu para esse resultado estendendo gradualmente os grupos que se tornavão suscetiveis de simpatia até abraçar o conjunto abstrato dos entes suscetiveis de ser amados.

5- Exame especial dos apanhados que preparão o culto especial das concepções numericas.

Passando agora a um exame mais minucioso da linguagem se descobre o vestigio das con-

cepções particulares que prepararão o culto especial das concepções numericas. É assim que, por um lado, se nota varios termos para designar as ideias de um e de dois de um modo concreto, antes de se tornarem abstratos. É assim que antes de chegar á ideia abstrata de grupo, a Humanidade concebeu grupos concretos: familia, tribu, rebanho, siada, cardume, enxame, floresta, etc. Mas além disso, considerando a representação das grandezas continuas pelos numeros, vê-se que essa representação foi preparada por comparações menos precisas. Isto é atestado pelos substantivos, adjetivos e adverbios em quasi todas as linguas.

Ex: grande, pequeno
pouco, muito
grande, maior, maximo
pequeno, menor, minimo
supremo, superior, medio, inferior, minimo

As locuções comparativas e superlativas para os adjetivos e adverbios. Os aumentativos e diminutivos dos adjetivos e substantivos.

Esta serie de considerações mostra que a

instituição sistematica da serie numerica apenas constitue o termo de uma longa evolução do pensamento humano. Até então mais ou menos confundidas com as demais concepções concretas e abstratas, elas destacão-se e tornão-se objeto da meditação da Humanidade iniciando o surto decisivo da razão teorica.

Vê-se tambem ao mesmo tempo que a cultura arimetica torna-se apenas o prolongamento da educação espontanea que o mais desprotegido cidadão recebe no meio da sociedade em que surge. Com efeito, essa cultura tem unicamente por fim desenvolver sistematicamente as concepções fornecidas pela linguagem vulgar.

6 – Apreciação filosofica da noção de numero.

Si as concepções numericas estão ligadas á nossa constituição afetiva conforme o demonstra a organização da linguagem, não póde restar duvida sobre a origem subjetiva de taes noções. Mas essa filiação torna-se mais saliente examinando de modo especial o advento dos numeros e a descoberta de suas propriedades iniciaes

Para fazer esse exame, cumpre distinguir primeiramente entre a *aquisição* das *noções* e o estabelecimento dos *sinaes* empregados para exprimi-las. Em segundo logar convem observar que a dificuldade de distinguir imediatamente as pluralidades alem de *3* é apenas *abstrata*. Com efeito, nos casos *concretos*, o conhecimento dos entes que compõe o grupo permite conservar a noção de grupos assás consideraveis. É assim que nós vemos as aves presidirem á creação de um grande numero de filhos.

Notemos agora que a noção direta que o Mundo nos oferece espontaneamente é a de *pluralidade* sem distinção de graus, o *caos* em uma palavra. A criança sente-se ao nacer abafada pela multiplicidade e incoherencia das impressões que recebe. São as disposições afetivas que herda da Humanidade atravez de sua Mãi e as condições simpaticas indispensaveis á sua vida que reagem espontaneamente sobre a inteligencia e a levão a lançar as primeiras bases da concepção da *ordem*, substituindo ao *caos* objetivo, o *arranjo* subjetivo.

Este arranjo começa pela fixação dos *seres e grupos de seres* que nos afetão, de modo a constatar com clareza e certeza a sua presença ou a sua auzencia. Ora, quando se trata dos seres isolados, o reconhecimento da presença ou da auzencia deles exige apenas uma mera intuição. Quanto aos grupos, porem, a simples inspeção já não basta para decidir si se contempla ou não o mesmo conjunto, por pouco que seus elementos avultem ou não nos sejão assas familiares. Com efeito, o conjunto póde mudar sem que possamos verifica-lo imediatamente, ou porque saião alguns elementos ou entrem novos; ou porque varie a disposição mutua dos elementos constitutivos do grupo; ou pelo concurso destas duas circunstancias. De sorte que o problema de saber si se tem diante de si o mesmo grupo, tomando unicamente em consideração a coexistencia dos elementos respetivos decompõe-se em duas ordens de questões irredutiveis:

1º Reconhecer si houve variação no grupo pela adjunção ou subtração de algum elemento.

2º Verificar si houve alteração pela mudança na posição dos elementos.

A solução da primeira questão conduziu à instituição da *numeração*, a da segunda forma objeto da teoria das *permutações*, *arranjos*, etc. Apesar da conexão de ambas, a ultima é evidentemente mais dificil do que a primeira, que sendo a unica primitivamente considerada é tambem a unica com a qual nos devemos ocupar atualmente. Ora, para distinguir com precisão os grupos maiores e menores, basta supôr neles os seres arrumados de modo que possam formar uma escala na qual cada grupo diferindo do anterior e do seguinte por um unico objeto, essa diferença seja apanhada com facilidade. A ideia abstrata desses grupos, isto é, a noção deles, desprezando-se a natureza dos elementos componentes, para só considerar o fato da *coexistencia*, — eis o que constitue o *numero*.

Até aqui supozemos os grupos como formados por elementos que coexistissem objetivamente. Mas, póde acontecer que o grupo seja constituido apenas

pela reunião em nosso cerebro de imagens correspondentes a seres ou fenomenos que se *succedem*. Neste caso o grupamento é puramente subjetivo. Seja como fôr, o *numero* é a concepção de um grupo objetivo ou subjetivo, abstrahindo da natureza dos elementos que o compõe; isto é, o numero indica os diversos graus da *coexistencia* ou da *successão*. Ex: 5 homens; 5 gerações; 5 minutos, etc.

7 - Apreciação direta do advento subjetivo das concepções numericas.

Isto posto, cumpre-nos indicar como o espirito foi levado a tal apreciação. Para descobri-lo comecemos por observar que, durante um periodo imemorial do estado fetichista a nossa especie não conta alem de *3*. Referimo-nos á contagem abstrata, conforme acima observamos. *Quatro* surgiu tardiamente, e surgiu ou por meio de *2* conforme o atesta a definição popular *2* e *2* são *4*; ou por meio de *5* e de *1* conforme o indica a notação romana IV, *cinco menos um*. Cinco sendo o numero de dedos das mãos e dos pés, deve ter sido um dos grupos primeiros notados, con-

forme o atesta o seu emprego ainda hoje na numeração concreta. O caderno consta de 5 folhas e a *mão* de papel consta de 5 cadernos. Segundo essa origem, o advento de *4* confirma a 15a lei de filosofia primeira, porque ele surgiu depois de *3* e de 5.

Isto nos mostra tambem que antes de formar a escala numerica, o espirito humano foi levado a fixar grupos descontinuos, segundo o interesse que eles despertavão. Já vimos a fixação de *5*. Dois cincos ou duas *mãos* ou dois pés ou *dez* devia ter sido um dos grupos mais cedo constituidos. Assim *dois trez* ou seis, *trez dois* etc.

É portanto incontestavel que todas as nossas concepções numericas resultarão das abstrações caraterizadas pelos vocabulos, *um*, *dois* e *trez*. Ora, Georges Leroy nas *Cartas sobre os animais*, demonstra que estes a partir das aves pelo menos, chegão a instituir essa arimetica rudimentar. O inicio de toda a evolução abstrata, sendo assim comum ás especies superiores, o sentimento habitual dessa conformidade deve

desenvolvel a nossa confraternização biocratica.

O que precede mostra como o conjunto da filosofia arimetica consiste em reconhecer o modo de advento e o surto primordial desses 3 numeros, a respeito dos quaes o exame da evolução individual não deixa a minima duvida.

Explicação do advento da noção de <u>unidade</u>:

Influencia do egoismo

" do altruismo

simbolo do <u>amor</u> e da <u>sintese</u> da <u>continuidade</u>.

Explicação do advento de <u>dois</u>

<u>arranjo</u> <u>combinação</u>

<u>ordem</u>

relativação da noção de <u>unidade</u>

<u>Um</u> e <u>dois</u> nunca são completamente abstratos na linguagem pois que varião com os sexos dos elementos.

Explicação do advento de <u>tres</u>

relativação da <u>unidade</u>

<u>sucessão</u> - <u>evolução</u> - progresso - tempo.

Chegado a seu termo o surto das concepções numericas depende do desenvolvimento coletivo. A

partir de <u>quatro</u> já as considerações objetivas começão a misturar-se com o ponto de vista subjetivo. Entretanto veremos que a familia e a sociedade bastão para sugerir a escala numerica até sete.

As propriedades subjetivas dos tres primeiros numeros que são o ponto de partida de toda a evolução teorica levarão nosso Mestre a denominá-los <u>sagrados</u>.

Eles simbolizam a formula sagrada do Positivismo, e na educação supren o enunciado desta formula inacessivel ás crianças.

Estes tres numeros não carecem de <u>sinais</u> pª a sua fixação. Inspirados pelos sentimentos eles ligão-se logo ás <u>imagens</u> mais intensas. Mas os <u>sinais</u> juntão-se á essa dupla representação desde que a situação social solicita o surto das concepções numericas.

Vê-se aqui uma confirmação da teoria logica que foi exposta na primeira lição.

II

1 - Recordação dos varios empregos atuaes dos numeros.

Surgidas subjetivamente, as concepções numericas se forão objetivando e estendendo á proporção que a

Humanidade sentir necessidade de conhecer e agir sobre a ordem exterior.

Para comprehender como essa transformação se operou, convem recordar o emprego que atualmente tem os numeros, depois de realizada toda a expansão de que erão suscetiveis.

Teremos assim uma confirmação da 13ª lei de Filozofia Primeira.

Os numeros são empregados atualmente para quatro fins: classificar, contar, calcular e medir. Desses quatro fins, o primeiro se distingue dos outros trez por ser o mais subjetivo.

2 - Emprego dos numeros para classificar.

A linguagem vulgar conservando a distincção entre os numeros ordinaes e os cardiaes guardou a lembrança da origem subjetiva dos numeros. Com efeito, o modo mesmo pelo qual surgem as concepções numericas mostra que os numeros servem para marcar a jerarchia antes de indicar a quantidade: Mãi, Pai e Filho, eis a jerarchia inicial.

Ha uma experiencia facil p.ª se conhecer esse ca-

rater das concepções numericas iniciaes. As crianças não ligão aos nomes dos numeros a principio a ideia dos grupos e sim a ideia de cada um dos objetos considerados numa certa ordem. Por exemplo, si se apresenta dois objetos a uma criança e se conta um e dois, e se pede dois, ela não dá ambos; dá aquele com o qual se formou o grupo dois partindo do outro que foi considerado como um. Aliás o nome dos dois numeros iniciaes mostra que a numeração ordinal é distincta da cardinal na sua origem: primeiro, segundo.

Ahi se vê que foi a contemplação da Humanidade que a induziu a fixar a atenção sobre o logar que os entes ocupão.

Mas os numeros podem ser empregados para classificar objetos quaesquer, de sorte que por ahi fez-se a transição do emprego subjetivo p.º o uzo objetivo.

3 - Emprego dos numeros para contar.

Todo classamento equivale a formar uma certa pluralidade ou grupo, e desde então era facil que o nome do ultimo posto servisse para designar o grupo. Com efeito, uma pluralidade fica caraterizada quando se sabe qual o ultimo posto a que ela dá logar

expondo os seus elementos dispostos em uma serie. A' vista desta observação foi facil que se abstrahisse da noção do *arranjo* para só considerar o grau da existencia coletiva. Eis ahi como os numeros se transformárão de *ordinaes* em *cardinaes*.

Note-se que a noção de *ordinalidade* é essencialmente subjetiva. A distinção entre *ordinal* e *cardinal* póde pois representar em arimetica a diferença geral entre o subjetivo e o objetivo.

Essa transformação foi inspirada por uma nova maneira de apreciar a jerarchia, que se apresentou quando se teve de classificar as familias ou as tribus pelos seus chefes, avaliando estes pela quantidade de seus comandados.

Foi assim que a classificação conduziu á *contagem*. *Contar* é distinguir um numero do que o precede e do que o segue. Essa distinção se opera considerando-se o numero como marcando o posto mais baixo a que se chegaria se dispuzessemos os elementos do grupo em serie linear. Quem conta faz implicitamente uma classificação. A escala numerica permite sistematizar essa transfor-

mação da *pluralidade* em *ordinalidade*. Mas p.ª isso, não precisa que ela seja de antemão indefinida; porque á medida que novos grupos fôrem surgindo não designados ainda, se póde ir creando sinais p.ª representa-los, visto como, na contagem, um numero não aparece senão depois do que o precede imediatamente.

4 - Emprego dos numeros p.ª *calcular* ou *avaliar*.

Calcular, arimeticamente considerando, ou *avaliar*, é achar o resultado de uma combinação dada de varios numeros conhecidos. Pela contagem, determina-se o logar que um grupo definido por qualquer forma ocupa na escala numerica *percorrendo um apoz outro todos os termos da escala*. Pelas *avaliações* propriamente ditas trata-se de determinar esse logar sem passar por todos os graus que o precedem.

Exemplos:

A avaliação supõe diversas especies de combinação. A Humanidade teve de as inventar assim como teve de instituir os processos p.ª avaliar os resultados delas.

Redução do calculo á classificação mediante a contagem facilitada pela instituição da serie numerica.

Ex:

Necessidade da construção previa da escala numerica indefinida para calcular.

5_ Emprego dos numeros para *medir*.

Distinção entre as grandezas continuas e as descontinuas.

A medida consiste em referir o conhecimento de uma grandeza ao de outra da mesma especie ou de especie diferente.

Explicação: Medida direta e medida indireta.

Medida direta: só entre grandezas da mesma especie.

Comparação das grandezas iguais.

Comparação das grandezas desiguais: *modulos* ou *unidades*.

Medidas pelos tiros d'arcos, passos, etc.

Medidas indiretas: grandezas da mesma especie ou de especies diferentes.

Grandezas da mesma especie

Grandezas de especies diferentes: medidas das distancias pelos dias de jornada.

Apreciação geral das modificações por que passou a noção de numero em consequencia de sua aplica=

ção á medida.

Carater *subjetivo* dessa aplicação que consiste:

1º na transformação de toda grandeza em uma *pluralidade* — ou das grandezas *continuas* em *discontinuas*. Ascendente do *subjetivismo* ou da *abstração*. Inicio do metodo infinitesimal em matematica.

2º *Igualdade* de todos os elementos da pluralidade.

Graças a essa dupla instituição foi que a *classificação* conduziu á *medida*, direta primeiro e depois indireta.

Na numeração abstrata todas as unidades são supostas espontaneamente iguais.

Numeros *fraccionarios*.

Numeros *incomensuraveis*.

A instituição da medida em cada caso não pertence á Logica.

Generalização da noção de numero: depois dessa aplicação extrema o numero passou a ser habitualmente considerado como designando *uma grandeza continua*. Os calculos forão sistematicamente instituidos nesta suposição, deixando as modificações

exigidas por cada caso particular para quando se tivesse de fazer a passagem do abstrato para o concreto.

Ex:

6- Consequencias filosoficas da transformação das concepções numericas de subjetivas em objetivas.

A Humanidade assegurou deste sorte o pleno desenvolvimento dellas e o surto do seu genio abstrato.

Foram as concepções numericas que derão o primeiro sentimento das leis naturais, antes de qualquer teologismo. Com efeito, a eficacia de todo calculo supõe a existencia de leis internas e externas.

Foi o surto das concepções numericas que permitiu instituir as leis da extensão e do movimento, e dahi subir ao conhecimento do Céu.

Produzido esse impulso, a Humanidade tentou achar leis numericas por toda parte; e procurando esse impossivel conseguiu construir a <u>sciencia</u>.

7- Conclusão.

Este surto objetivo realisando-se, porem, empiricamente, expoz a evolução historica a desvios que devem ser corrigidos na evolução individual.

Para isso cumpre antes de tudo lembrar desde o ini-

cio dos estudos logicos, que em sistemas dos numeros á apreciação do Mundo é uma instituição da Humanidade.

De sorte que em vez de receber o numero da contemplação do Mundo, o numero foi apenas o primeiro instrumento abstrato que a Humanidade aplicou ao estudo da Ordem exterior.

Todo surto objetivo resultou portanto de uma instituição subjetiva.

III

Plano do Calculo Arimetico.

1- Resumo destas considerações na concepção do plano que convem ao calculo arimetico.

Baseando-nos nas explicações precedentes podemos conceber agora o conjunto do Calculo Arimetico.

Antes de tudo convem precisar melhor o confronto que tinhamos feito com o calculo algebrico.

2- Comparação com o calculo algebrico.

Numero <u>determinado</u> e <u>indeterminado</u>.

A arimetica representa o dominio mais <u>simples</u>, mais <u>geral</u> e mais <u>abstrato</u>.

Pureza logica: subordinação do abstrato ao concreto;

subordinação do metodo á doutrina; subordinação da indução e da dedução á construção.
Tendencia para a Teologia em oposição á Algebra que inclina-se para a metafisica.
Comparação com a Filosofia Primeira.
Algebra universal: os sinais não representão então numeros indeterminados; passão a representar as concepções de toda ordem.
3 – Primeira decomposição do calculo arimetico em dois dominios, um subjetivo e outro objetivo.
1º – teoria subjetiva dos numeros.
2º – objetivação dessas concepções.
4 – Segunda decomposição pela distinção no dominio objetivo entre:
1º uma instituição fundamental destinada a permitir todas as classificações e todos os calculos – – numeração –
e 2º a coordenação dos processos de avaliação.
Toda avaliação póde ser efetuada por contagem. Motivos de ordem logica e pratica que dificultão esse processo, mesmo com o auxilio da escala numerica, distantemente utilizada. Necessidade de processos que fação recahir toda a avaliação em um pequeno numero de contagens seguras e rapidas, isto é, faceis. Tal é o destino das operações arimeticas.
5 – Este plano resulta da evolução historica e verifica a lei da jerarchia positiva.
Decomposição das avaliações.
Constituição essencial da arimetica no periodo fetichista e teocratico.
Aperfeiçoamentos modernos.
Anarchia academica.
Sistematização positiva, precedida pela tentativa de Condorcet.
Condições tocantes em que foi escrito o opusculo: a arte de aprender a contar.
6 – Importancia superior do destino politico e moral da arimetica.
O surto inicial das concepções numericas já patenteia a verdadeira dignidade do calculo arimetico. Mas o imenso desenvolvimento objetivo a que ele conduziu o genio da Humanidade ainda veio tornar mais saliente o papel que cabe á arimetica no conjunto da existencia Humana.

Com efeito, ao passo que as concepções numericas provocavão a apreciação abstrata da ordem exterior, o estudo desta ia revelando a impossibilidade de toda explicação numerica alem dos fenomenos geometricos e mecanicos e portanto astronomicos. A cultura teorica desprendia assim a Humanidade do ponto de vista _absoluto_, e fazia prevalecer por toda parte o _relativo_. A modificabilidade crescente dos fenomenos oferecia por outro lado um novo campo ás aplicações subjetivas dos numeros. Incapazes de representar a ordem objetiva, eles se tornarão simbolos logicos que facilitavão essa representação, e ao mesmo tempo permitião que a pratica adquirisse a _precizão_ que a teoria não comportava.

Os fenomenos politicos e morais especialmente, nos quaes o ponto de vista de especulação tende a confundir-se com o da ação, permitindo o aperfeiçoamento da ordem espontanea, tornarão-se o dominio predileto das aplicações numericas.

Ora, semilhante aptidão não é partilhada por nenhum dos outros termos da hierarchia cosmologica.

De sorte que a arimetica se nos aparece como o mais digno desses termos.

E, para tornar bem saliente esse carater, convem notar a circumstancia de que tal aptidão reside exclusivamente nas especulações em que o ponto de vista de valor se acha isento da intervenção do espirito algebrico.

Graças ás propriedades subjetivas, os numeros servem para dar á existencia do Grão-Ser uma regularidade que tornará os fenomenos humanos mais regulares ainda do que os acontecimentos astronomicos. De sorte que eles comportarão desde então uma precizão superior á que é compativel com a ordem celeste.

Não é, porem, no estudo do calculo arimetico que esta apreciação póde ser cabalmente elucidada; porque ela resume-se na teoria das leis numericas da existencia humana. O seu logar é na Moral. Mas era necessario assinalar desde já semilhante ponto de vista para que se ajuizasse da importancia das concepções numericas e da dignidade do calculo arimetico.

7 – Conclusão: indicação do objeto das lições que devem completar esta teoria subjetiva dos numeros.

Dadas essas noções geraes acerca das concepções numericas, cumpre-nos examinar de modo mais especial:

1º o desenvolvimento historico de sua instituição subjetiva.

2º A regeneração positivista dessas especulações iniciaes do genio da Humanidade.

Tal será o objeto das nossas duas lições futuras.

Rio, 21 de Aristoteles de 109
18 de Março de 1897.

(assinado) R. Teixeira Mendes.
42 - Rua B. Constant.

Ensino Positivista.

Logica

Calculo arimetico

3ª Lição

Desenvolvimento historico da instituição subjetiva dos numeros.

I

Circunscrição precisa da teoria subjetiva dos numeros.

1 – Objeto e plano desta lição.

Na ultima lição nos propusemos mostrar o ascendente que as concepções numericas têm no conjunto dos pensamentos humanos. Nesse intuito, começamos por vos assinalar a universalidade do dominio de taes concepções, indelevelmente impressas em quasi todos os vocabulos das linguas modernas como o demonstra o contraste geral entre o singular e o plural. Fizemos mesmo

notar que os *pronomes*, *adjetivos femininos* e os *verbos* marcão especialmente o accidente dos numeros iniciaes *um*, *dois* e *trez*. Partindo dahi, vos indicamos como na fase fetichica e teocratica da linguagem, essa distinção especial se estendia a quasi todos os termos da lingua e de modo explícito, mediante a instituição do *dual* e mesmo do *trial*.

Isto posto vos ponderamos como o desaparecimento de taes formas nas linguas modernas não denunciava o decrescimento do predominio das concepções numericas. Os idiomas ocidentaes apenas simplificárão a maneira de designar todas as nuanças da pluralidade, estendendo, aos cazos em que dantes empregavão o *dual* e o *trial*, o uzo da escala numerica, que nas linguas antigas só era indispensavel a partir de 4.

Explicando esse predominio universal das concepções numericas, vos mostramos que ele rezultava da nossa constituição afetiva. A distinção abstrata entre a *singularidade* e a *pluralidade*, dissemos, é mesmo incompreensivel

em uma especie sem *altruismo*, porque só a sociabilidade nos permite formar a ideia de *coletividade* ou *pluralidade*. Ao mesmo tempo, mostramos que era á logica do sentimento que deviamos a especificação dos graus iniciaes da pluralidade, assim como fôra o acendente do altruismo que conduzira á simplificação numerica das linguas modernas. A simples distinção entre o *singular* e o *plural* constituia o termo final dos esforços que começárão por fixar *dois* e *trez*.

Essas considerações não bastão, porem, para que tireis do exame das concepções numericas todo o fruto moral e mental que ele comporta. Moralmente, o estudo que fizemos apenas vos permite apanhar essa prodigiosa construção da Humanidade de um modo geral. Ele é insuficiente pois, para dar á vossa gratidão a intensidade que vos predisporá melhor para o serviço social, ao mesmo tempo que determinará o intimo contentamento inerente á plenitude do exercicio altruista. Intelectualmente, a nossa apreciação não vos habilita a tirar do espetaculo para o qual chamei

a nossa atenção todos os ensinamentos logicos que ele encerra. Essa dupla lacuna resulta de não havermos considerado a serie de esforços por meio dos quaes a Humanidade organizou a regulamentação numerica da sua existencia. Precizamos, portanto, por um lado, completar a nossa exposição anterior com a sumaria commemoração desses esforços; e por outro lado, indicar-vos o termo preciso para o qual eles convergião, isto é, a sistematização positivista.

Na lição de hoje, porem, nos limitaremos a recordar o desenvolvimento historico da instituição subjetiva dos numeros. Quanto á sistematização de tal evolução pelo Positivismo, será o objeto da lição futura.

2 – Delimitação exata do dominio subjetivo dos numeros.

A 7ª lei de Fil. Primeira, a <u>lei</u> dos <u>3 estados</u> <u>mentaes</u>, indica naturalmente o plano de nossa lição de hoje. Esse plano é confirmado pela 8ª e 9ª leis universaes; reação da pratica, convergencia dos sentimentos, fonte e destino das transformações mentaes

Antes, porem, de examinar a marcha historica da instituição subjetiva dos numeros, convem circunscrever exatamente o dominio de tal instituição. Vimos que os numeros são utilizados para quatro fins: <u>classificar</u>, <u>contar</u>, <u>calcular</u> e <u>medir</u>. Sob esses quatro aspetos eles podem ser empregados <u>subjetivamente</u> ou <u>objetivamente</u>.

1º classificar: <u>subjetivamente</u>, segundo a gerarchia da dignidade; <u>objetivamente</u>, segundo a gerarchia da dependencia exterior.

2º contar: 1º Determinar grupos subjetivamente instituidos pela Humanidade.
2º Determinar grupos objetivos ligados pelas leis exteriores.

3º Calcular: Avaliações que resultam das <u>leis</u> artificiaes instituidas pela Humanidade, quer na Industria, quer na Politica e na Moral.
Avaliações que resultão das leis naturaes.

4º Medir: Pª introduzir em nossas concepções e ações uma precisão que seria

objetivamente impossivel. Para ter um conheci=mento preciso da ordem exterior quando é possivel levar a apreciação objetiva até a determinação numerica.

Em qualquer desses casos, a intuição inicial é sempre subjetiva, ao passo que o custo decisivo resulta da combinação das exigencias subjetivas e objetivas.

Vê-se, pois, que o dominio subjetivo dos numeros é muito mais vasto do que o seu imperio objetivo; porque os numeros podem ser subjetivamente in=troduzidos em assuntos nos quaes a sua admissão objetiva seria inexequivel.

3 – Comparação entre a teoria e a pratica, quanto ao emprego subjetivo dos numeros.

O emprego subjetivo dos numeros é maior na pra=tica do que na teoria. Reconhece-se essa superiori=dade quer considerando o uso subjetivo dos nu=meros na Industria, quer na Politica e na Moral.

4 – A 14ª lei universal (classamento) indica a ex=tensão gradual do emprego subjetivo dos numeros.

Para constata-lo, devemos considerar:

α) gerarchia das siencias.

β) gerarchia das artes { esteticas / moraes

γ) gerarchia dos oficios.

Na gerarchia sientifica, o emprego subjetivo dos numeros tem por objeto: já coordenar as nossas con=cepções numericas, assimilando todas as medidas aos grupos; já permitir a passagem do abstrato para o concreto.

Gerarchia estetica. Poezia { Verso / Proza
Muzica
Pintura
Escultura
Architetura.

O emprego subjetivo dos numeros tem alí por fim dimi=nuir a indecizão e aproximar o mais possivel a expressão da concepção, subordinando cada vez mais o egoismo ao altruismo.

Gerarchia pratica.

Artes superiores { Moral / Politica

Artes inferiores { Biologicas / Chimicas / Fizicas / Astronomicas / Matematicas.

Regulamentar a existencia pratica, augmentando cada vez mais a sinergia dos esforços garantindo o ascendente da *moralidade* e a *previsão*.

Examinemos, sob cada um desses aspetos, o emprego subjetivo dos numeros.

5– Exame geral do emprego subjetivo dos numeros nas gerarchias cientificas e esteticas.

d) Gerarchia cientifica.

A *precisão* raríssimas vezes é possivel objetivamente mesmo na Logica, isto é, em Matematica. Por exemplo, é impossivel exprimir exatamente, na generalidade dos casos, a grandeza do lado de um quadrado de superficie conhecida. Não é possivel determinar nunca exatamente o comprimento de uma circunferencia de raio dado. E assim por diante. Isto conduziu a substituir as *relações precisas* pelas *relações aproximadas*. Ora essa aproximação, digo, substituição consiste em uma aplicação subjetiva dos numeros. Noção de *limite* – Tipo em Moral e Poesia (ideal).

Mas o predominio subjetivo dos numeros se faz

sentir em Logica desde a instituição fundamental. Porque a constituição sistematica da escala numerica é impossivel sem a escolha de uma *base*. Ora essa escolha é subjetiva, porque a ordem exterior não nos impõe nenhuma. A substituição dos numeros aproximados aos numeros exatos não se faz só quando a determinação destes é impossivel. O surto da vida industrial e a sua reação sobre a evolução mental determinou não só a substituição dos *incomensuraveis* pelas *frações*, como as *frações ordinarias* pelas *frações bazicas*, ou as *frações ordinarias* por outras de menores termos (frações continuas) como vereis.

Em todos esses casos, trata-se de estabelecer, *teoricamente*, uma ligação entre as grandezas continuas e as pluralidades ou grandezas descontinuas; e *praticamente*, se visa adaptar cada vez mais a ciencia ao seu destino exterior, isto é, permitir a passagem do abstrato para o concreto. As concepções tornão-se assim ao mesmo tempo mais *realizaveis* e mais *relativas*, tornando-se

mais subjetivas:

Predominio da construção sobre a deducção e a inducção.

Não insistiremos agora em outras observações para nos mostrar o ascendente da instituição subjetiva dos numeros em toda Logica, porque teremos ocasião de vê-lo assinalar no decurso de nosso estudo.

A partir da Astronomia, o emprego subjetivo dos numeros vae cada vez mais prevalecendo sobre o seu uso objetivo, mediante a instituição dos numeros que têm por fim subordinar cada vez melhor a analise objetiva a sintese subjetiva. Tal é o destino dos numeros a que se chamão medias; tal é o destino dos numeros que circunscrevem os objetos da contemplação ou os graus da analise.

Exemplos:

Fisica

- Astronomia – Limitação do numero de astros de nosso Mundo. Instituição das medias na representação das grandezas celestes.

- Fisica – Medias. Ex.
- Chimica – Idem.

Moral.

- Biologia – Medias nas dimensões dos orgãos.
  Graus da analise
- Sociologia – Ex: Fases da historia.
- Moral – Ex: Constituição numerica da alma.

β) gerarchia estetica.

Poezia
- Verso – metrificação.
- Proza – "

Musica
- Melodia
- Harmonia

Pintura – Proporções.
Esculptura – "
Architetura – Simetria – Distribuição das massas.

6 — Exame geral do emprego subjetivo dos numeros na hierarchia pratica.

a) Artes superiores.

Moral — Instituição fundamental das idades.

Culto — Instituição do calendario. Numero das orações, extensão das orações.

Dogma — Distribuição do Ensino. Numero de lições.

Regimem — Vida vegetativa; dosagem dos alimentos.

Vida intellectual — Horas de cultura teorica e estetica.

Vida pratica — Horas de trabalho.

Politica.

Sacerdotal.

Estatistica da Constituição:
- das familias
- " Patrias
- do sacerdocio
- do patriciado
- do proletariado
- do

Taxa dos salarios
numeração concreta e moeda

Governamental ou patricial.

Estatistica da produção e do consumo.

Condições numericas da circulação do capital:
- Taxa das permutas
- Impostos.
- Juros.

Estatistica especial de cada industria.

b) Artes subalternas.

Emprego subjetivo dos numeros na fixação das medidas capitaes e mesmo muitas vezes das medidas secundarias.

7 — Conclusões.

Este quadro mostra que a teoria subjetiva dos numeros só póde ser constituida definitivamente na Moral, teorica e pratica, por um lado, e na teoria da Industria Positiva, por outro lado. Vejamos agora rapidamente a incomparavel evolução que presidiu a tão maravilhosa construção. —

II

Evolução da teoria subjetiva dos numeros.

1_ Instituição fundamental das concepções numericas durante o fetichismo espontaneo.

Assistimos na ultima lição ao advento subjetivo dos numeros. É por esse advento que o dezenvolvimento social da razão teorica liga-se ao seu despertar na existencia animal. Mas desde então patenteamos que esse advento estava ligado á nossa constituição altruista. O aforismo de nosso Pai espiritual, *abstrahir para generalizar afim de sistematizar*, mostra que a razão abstrata não póde diferenciar-se da razão concreta senão nas especies dotadas de altruismo. Animaes que não possuem *sentimentos generosos* não precisão de *ideias geraes*.

Isto posto, o surto das especulações numericas dependia essencialmente da instituição da *escala numerica*. Enquanto essa escala não estivesse formada as avaliações tendo de fazer-se por contagem havião de circunscrever-se a combinações muito simples e entre numeros muito

pequenos. Mas essa fatalidade só póde ser apreciada quando a existencia pratica e teorica da Humanidade já muito adiantada conduzio a calculos entre numeros suficientemente grandes. Póde-se dizer que já então a escala numerica estava constituida em virtude de impulsos subjetivos e objetivos primordiaes, anteriores ás grandes avaliações.

Com efeito, a preponderancia do altruismo dezenvolvendo e sistematizando cada vez mais o fetichismo, fez em breve prevalecer a astrolatria, isto é, a adoração do Céu e dos Astros, sobretudo o Sol e a Lua. Essa adoração constituiu o mais poderoso dos estimulos objetivos que, juntando-se aos impulsos afetivos facilitarão a instituição da escala numerica antes do surto do *calculo aritmetico*, que essa escala veio favorecer.

Vê-se aqui o primeiro exemplo da aptidão que têm estudos inferiores para preparar os instrumentos logicos sobretudo destinados aos superiores. Foi o que se deu com o calculo integral que a Geometria elaborou sobretudo para a Mecanica Geral.

Para bem apreciar a marcha do espirito hu=

mano na construção da escala numerica, cumpre recordar, antes de tudo, quaes são as noções fundamentaes que nela se achão condensadas. Isto é uma necessidade logica que vereis confirmada por toda parte. É só a consideração de um tipo plenamente constituido que nos permite remontar a seus antecedentes e dar-nos conta da sua evolução. Por exemplo, é tomando a planta completamente constituida que podemos guiar o nosso estudo na serie de transformações porque passa a semente até tornar-se o vegetal completo. Por isso tambem, é que não se póde apreciar convenientemente os primeiros escritos de nosso Mestre antes de conhecer as suas ultimas obras.

Diretamente examinada na sua constituição atual, a escala numerica se nos aprezenta como uma gerarchia de grupos construidos sob 2 tipos. Esses grupos são reprezentados por um duplo sistema de sinaes fonicos e graficos, como as demais concepções condensadas pela linguagem. O primeiro dos tipos a que nos referimos consiste na fixação imediata de

alguns dos graus sucessivos iniciaes da pluralidade. São esses graus que formão as abstrações chamadas *numeros simples*, e na linguagem, falada ou escrita, são reprezentadas por um sinal empirico. O segundo tipo repousa na instituição das *unidades compostas*. As unidades compostas são pluralidades que se considerão como formando um só todo. Os sinaes complexos que as reprezentão resultão de uma combinação que traduz a constituição de taes unidades.

Vê-se assim que, para aplicar os numeros ao conhecimento da ordem, a Humanidade recorreu ora á *analise*, ora á *sintese*, ambas subjetivamente instituidas. Com efeito, para *medir*, foi preciso decompor as grandezas continuas em partes ideiaes, *iguaes entre si*, imaginando que a *singularidade* ou *individualidade* se tornava *pluralidade* ou *coletividade*. Ao passo que para gerarquizar as *pluralidades* foi preciso reunir as *individualidades*, imaginando que as pluralidades se tornavão *singularidades coletivas* ou *coletividades*.

Ora é facil de constatar ambas essas instituições

desde o fetichismo espontaneo. Com efeito, quanto á fixação dos numeros simples, basta lembrar a fundação das abstrações: *um*, *dois*, *trez*. E quanto ás unidades coletivas, a sua noção foi inspirada pelo espetaculo social que revelou bem cedo os *entes compostos*, familia, tribu, federações de tribus. Apenas nesse estado primitivo, as unidades compostas *concretas* não se constituem uniformemente com os seus elementos (homens, familias, tribus); ao passo que a constituição da escala numerica *abstrata* supõe tal uniformidade. Etc.

Mas a arregimentação das forças guerreiras conduziu bem cedo a essa capital instituição preparada espontaneamente pelo espetaculo de familias constituidas do mesmo modo (isto é contendo o mesmo numero de membros).

Instituidos os trez primeiros numeros, ou mesmo os dois primeiros, e instituidas as unidades coletivas concretas, a construcção da escala numerica apenas exigia que o conjunto das necessidades subjetivas e objetivas a solicitassem.

Resta-nos, pois, mostrar como o surto da

Humanidade conduziu a esse resultado ainda no periodo fetichista, mas já então na fase astrolatrica.

2- Surto essencial sob o fetichismo astrolatrico.

Em primeiro logar devemos lembrar que as condições exteriores se juntárão bem depressa aos estimulos subjetivos para fixar os trez primeiros numeros. Nesse sentido cumpre reconhecer que o Céu primeiro e depois o Sol representão o maior desses estimulos objetivos. A singularidade de cada um deles tende a dar á noção de unidade um carater objetivo. Quanto á Lua, a diversidade de seus aspetos, a fez considerar por muito tempo como diferentes astros. Mas tomando o aspeto mais belo, a *Lua cheia*, se reconhece que a sua presença juntou-se depressa ao Céu e ao Sol para objetivar a noção de unidade. Ao mesmo tempo, *dois* era caraterizado pelo *Céu* e o *Sol*, ou pelo *Sol* e a *Lua Cheia*; pelo *dia* e a *noite*; pela *Terra* e o *Céu*, ou a *Terra* e a *Agua*. *Trez* encontrou uma aplicação no grupo Céu, Sol e Lua; *Terra*, *Agua* e *Céu*; e nas trez fases principaes da Lua. A Lua nova só muito tardiamente póde ser descoberta. Finalmente

ha varios grupos de tres Estrelas.

Notae aqui de passagem a preponderancia das formas, reta e plana, circular e esferica e o carater sintetico que oferece o Céu como contendo tudo. Centro e unidade - 2 sentidos nas retas.

O corpo humano aprezenta tambem uma concentração dos numeros iniciaes 1 e 2: Cabeça e pares de membros. Noção de simetria.

Esta multiplicidade de reprezentações concretas familiares, continuas, tendem: α) a facilitar a concepção abstrata dos 3 primeiros numeros - indução; β) a generalizar o seu predominio, provocando-os por toda parte - dedução; γ) a empregá-los sistematicamente para reduzir a eles todas as concepções numericas - construção.

Ao mesmo tempo, porem, que os numeros sagrados tendião a introduzir-se por toda parte, determinando aproximações e separações inspiradas pela lei-mãi de Filosofia Primeira, as condições esforçadas da vida levarão a fixar desconexamente outros grupos. Entre esses ocupa o primeiro logar cinco, ligado á constituição geral de nosso corpo.

Mãos, pés; (cinco dedos). Cabeça e os quatro membros. Numero de sentidos.

Essas construções, deduções e induções iniciaes forão dirigidas sempre pelo predominio da razão concreta, pois que a atenção se fixava sobre os grupos conforme o conjunto das condições da existencia humana. Devemos, pois, mostrar como essas condições levárão a constituir a gerarchia numerica a partir de tres. As considerações subjetivas tornão-se então sobretudo sociaes, em vez de serem simplesmente domesticas.

Advento de quatro.

Origem subjetiva: dois casaes sem filhos, conforme a definição mais popular:

Dois e dois são quatro.

O numero de membros: duas mãos e dois pés.

Filiação para com cinco, conforme o indica a dupla notação romana: quatro é ali reprezentado ou pelos 4 dedos ou pela mão (V) menos o polegar. (o sinal V reprezenta a mão)

Vê-se por ali que os dedos devião ter fornecido os primeiros sinaes numericos. (Contar pelos dedos)

Importancia desse numero: (4)

Filiação 7ª com trez.

α) estabelece a continuidade da escala até cinco, ligando cinco a trez (decima quinta lei de Filosofia Primeira*)

β) constitue a primeira manifestação do espirito algebrico, como se vê comparando os dois enunciados:

– dois e dois são quatro

– trez e um são quatro

que conduzem a:

– dois e dois são trez e um.

O primeiro membro desta frase indica uma soma de duas parcelas, do mesmo modo que o segundo membro. E o confronto das parcelas do 1º membro com as parcelas do 2º membro mostra que uma destas (3 igual a dois mais um) tem uma unidade de mais e a outra (1 igual a 2 menos 1) tem uma unidade de menos do que aquelas.

É esta o primeiro exemplo da persistencia da soma de duas parcelas quando uma cresce da mesma quantidade de que a outra simultaneamente diminue.

γ) Noção de potencia.

---

*Intermedio subordinado aos extremos – 4 intermedio entre 3 e 5.

A combinação de 4 com 3 sugerida pelos dedos conduziu á duzia (4 é 2 mais 2; 12 é 4 mais 4 mais 4).

Origem objetiva.

Os quatro pontos cardiaes.

As quatro fazes da Lua, assimiladas a 4 luas.

Céu, Terra, Sol, Lua.

Filiação de cinco aos numeros sagrados:

subjetiva:

2 familias sem filhos sob um chefe commum

2 familias uma com filho outra sem filho

objetiva:

Terra, Agua, Céu, Sol, e Lua cheia

Cinco tinha conduzido a 10 e a 20.

– Construcção de (6) seis:

3 + 3

2 + 2 + 2

1 + 2 + 3

Importancia dada a esse numero em consequencia de seu modo de formação com os numeros sagrados.

Representa por muito tempo os planetas conhecidos.

Formação da duzia por imitação da dezena espontaneamente inspirada pelas mãos e os pés.

Construção do sete:

Origem subjetiva:

$3+1+3$

$2+3+2$

Constatação objetiva: os planetas visiveis.

Necessidade de imaginar os numeros até sete como formados pelos sagrados.

Medida do tempo:

Instituição da semana devida sobretudo ás propriedades subjetivas.

Especulações geraes sobre os numeros:

distinção entre { pares e impares
primos e não primos.

Constituição da numeração: adoração do Sol e dos planetas. Instituição do anno que parece comprar os tres numeros tres, dez e doze, segundo a contagem de 360 dias

O habito de contar pelos dedos e até primeiro resultado da astronomia conduziram a sistematizar a numeração decimal

Emprego na numeração.

Advento do calculo

Instituição das primeiras operações

adição: $2+2$, $2+3$, $3+3$, $1+2+3$, $2+3+2$, $3+1+3$.

subtração: $5-1$

multiplicação: $2+2+2$ ou $3+3$

potencia: Esta não deu lugar a nenhuma operação distincta antes do surto algebrico peculiar aos modernos.

3- Constituição inicial pela teocracia.

Sistematização abstrata dos resultados fetichicos.

Objetivação dos numeros desde então concebidos como seres exteriores, como as demais abstrações. (Homero - palavras aladas). Atributos humanos supostos aos numeros.

Desenvolvimento da escala numerica tornando-a infinita.

Preponderancia da base decimal.

Aplicação dos numeros á medida da extensão: advento da geometria

A medida do peso - balança - germen da estatica.

A medida da velocidade - germen da dinamica

Extensão do calculo fetichico.

Invenção da divisão. Introdução das frações.
Generalisação do calculo fetichico aos casos fracionarios.
- transformação da multiplicação.
Invenção da raiz quadrada.
Importancia dada ao numero quatro incorporado aos numeros sagrados para de sua soma dar dez, consagrado pelo culto do Sol.
Introdução decisiva dos numeros na regulamentação da vida humana.
4- Expansão da instituição subjetiva dos numeros durante o politeismo progressista mentalmente rezumido na evolução grega.
Corrente positiva - Pitagoras

Aristoteles { Poetica, Retorica, Logica

Archimedes - aproximações.
Desvio metafisico, retrogado - Platão.
Instituições empiricas - juro -
5- Extensão extrema sob o monoteismo ocidental.
Faze organica - Assimilação dos resultados anteriores. Consagração especial dos numeros

sagrados: dagua da Trindade.
Crise metafisica - Nominalismo e Realismo
Ascendente positivo - predominio do ponto de vista pratico - ascendente dos calculos aproximados - frações decimaes.
- Frações continuas.
Surto da Logica e da Astronomia: dezenvolvimento das medias.
Dezenvolvimento da teoria das series.
Emprego dos numeros nas siencias superiores como meios logicos.
6- Aberrações peculiares á anarchia moderna.
Calculo das probabilidades: aplicação dos numeros á previsão dos azares.
Dezenvolvimento das propriedades objetivas dos numeros; e das condições de divisibilidade (peculiares a cada sistema e, portanto, de valor principalmente subjetivo)
Revolta contra a regulamentação numerica:
Na Moral - Sentimento; dezuso da cultura moral
Inteligencia. Poezia
Fizica. Menosprezo da sobriedade.

Na Politica – Ataques socialistas á instituição do juro.

7 – Conclusão.

Importancia capital do Fetichismo: comparação de seus serviços com os das fases posteriores.

Necessidade da sistematização positivista.

III

Apreciação sintetica das conclusões a tirar desta evolução.

1 – O Passado preparou os elementos que o Futuro deve sistematizar.

2 – Impossibilidade do estudo especialista da ciencia. Irracionalidade do academicismo não menor do que a imoralidade de semilhante aberração.

3 – Só o ponto de vista religioso permite comprehender o Passado, prever o Futuro, e, portanto regular o Presente.

4 – Impossibilidade da historia especial da ciencia e especialmente da Logica.

5 – Impossibilidade de instituir definitivamente o estudo do calculo arimetico antes da fundação da Sociologia.

6 – Insuficiencia dessa fundação sem a transformação da Filosofia em Religião.

7 – Conclusão – Glorificação de Clotilde.

Instituidas pela preponderancia importancia da Mulher no conjunto da educação humana, as concepções numericas só puderão ser sistematizadas graças ao acendente sistematico do sexo feminino, resumido na mais egregia de suas manifestações. É o que veremos na nossa futura lição.

Rio, 26 de Aristoteles de 109
23 de Março de 1897

:(assinado). R. Teixeira Mendes.
42 – Rua B. Constant.

Ensino positivista.

Logica.

Calculo arimetico.
4ª Lição

Extensão sistematica da teoria subjetiva dos numeros, mediante a sua regeneração positivista.

I

Possibilidade e necessidade da regulamentação numerica da existencia humana.

1 – Objeto e plano da lição.

As nossas ultimas considerações acerca da teoria subjetiva dos numeros nos mostrárão o desenvolvimento crescente que essa teoria foi tendo no conjunto da existencia humana. Similhante desenvolvimento já demonstra por si só a possibilidade e a necessidade da regulamentação numerica da vida social, quer coletiva, quer individual. Porque a Humanidade sendo dominada pelas leis

naturaes, o advento e o surto de suas instituições quaesquer traduzam essencialmente o predominio dessas leis.

Mas, para que essa observação seja bem comprehendida, convem ter presente a constituição ternaria da gerarchia teorica que distribue as leis naturaes em *fisicas*, *intelectuaes* e *moraes*. Na *Filozofia Primeira* vos mostramos que essa progressão rezultava do dualismo historico, subdividindo a ordem interior em *Sociologia* e *Moral*. Dahi rezulta que todas as manifestações do Grão-Ser revelão ao mesmo tempo o predominio objetivo do mundo e os esforços incessantes da Humanidade para o seu proprio aperfeiçoamento e o melhoramento de sua situação. Assim sempre que vemos um qualquer dos fenomenos humanos ir-se tornando cada vez mais caracteristico, devemos concluir que o limite para o qual ele tende constitue o estado de mais completa harmonia de que é suscetivel o acordo entre o Mundo e o Homem. E, inversamente, o decrescimento gradual de um fenomeno humano denota o seu carater provizorio ou transitorio e a sua

eliminação futura ou pelo menos a sua redução a um limite minimo que a mesma evolução assinala como a meta dos esforços da Humanidade.

É desta consideração que rezulta o metodo de *filiação*. Como se vê, ele é constituido por uma combinação entre a *indução*, que nos permite apanhar o que ha de constante no conjunto da evolução, e a *dedução*, que é quem nos habilita a imaginar o *limite* para o qual tende, sob cada aspeto, o movimento humano. Mas essa combinação realiza-se sob o ascendente do *sentimento*, sem cuja presidencia o limite imaginado seria imperfeito, ou mesmo inexequivel, por não se ter tomado o conjunto das condições humanas.

"O metodo de filiação constitue, pois, o primeiro estado da *construção* que, na sintese moral, deve finalmente coordenar, sob o principio religioso, todos os materiaes sucessivamente emanados da analise teorica." (Sintese. pag. 46). Aplicando-o á apreciação da teoria subjetiva dos numeros, reconhece-se imediatamente a necessidade e a possibilidade da regulamentação numerica da exis-

tencia humana. Mas esse apanhado sintetico, suficiente para a convicção, não basta para habilitar-nos a sistematizar semilhante teoria. Porque não nos indica os motivos de tal necessidade e de tal possibilidade. Torna-se, pois, indispensavel o exame das condições objetivas e subjetivas que explicão o surto historico do emprego subjetivo dos numeros. Só então poderemos caraterizar a consagração que a Humanidade lhe deu no Positivismo. Tal é a serie de dados que nos convencerá da verdadeira dignidade que cabe ao calculo arimetico no conjunto do saber humano.

Estas observações nos indicão já o objeto e o plano de nossa lição de hoje. Visando a sistematização normal da teoria subjetiva dos numeros, cumpre-nos, preliminarmente, examinar os fundamentos que ela encontra na constituição de nossa natureza e de nossa situação. Depois devemos comunicar-vos algumas das aplicações decisivas que nosso Mestre fez dessa teoria. Mas essas aplicações, tomadas ao dominio inferior e ao dominio superior, terão sobretudo por fim precizar

as nossas concepções e explicar as regras com que a educação positivista terá habituado os que vêm receber este ensino. Concluiremos enfim pelas considerações religiosas naturalmente sugeridas pelo estudo que acabamos de esboçar.

2- Posição do problema humano como conduzindo á regulamentação artificial da existencia individual e coletiva.

Recordação do problema humano religiosamente considerado.

Sua concentração na subordinação do egoismo ao altruismo.

Impossibilidade dessa subordinação sem dissipar por toda parte a _duvida_, a _indecisão_, e a _irresolução_.

Isto exige a regulamentação artificial da existencia humana.

3- Insuficiencia das leis naturaes para produzir essa regulamentação.

Todos os fenomenos devem ser concebidos como regidos por leis numericas. Mas a complicação dos fenomenos torna cada vez mais dificil a determinação

dessas leis á medida que os fenomenos se complicão.
Dahi a insuficiencia das leis naturaes para prever os fenomenos e portanto para regular o nosso sentimento e a nossa atividade.

O vago que dahi resulta só póde ser favoravel ao egoismo. Necessidade consequente de elimina-lo.

4 – Possibilidade de completar as leis naturaes pelas leis artificiaes, em consequencia da modificabilidade.

Os fenomenos humanos sendo os mais complicados, são tambem os mais modificaveis.

A modificabilidade diz apenas respeito á intensidade dos fenomenos, cujo arranjo persiste inalteravel (3ª lei)

Isto traça o campo de nossa intervenção.

5 – A eficacia da regulamentação resulta da existencia coletiva.

O conjunto das leis da animalidade tende a tornar naturaes as leis artificiaes.

<u>Entre o Homem e o Mundo é preciso a Humanidade</u>

6 – As leis artificiaes pódem e devem adquirir a precisão numerica, para dissiparem a duvida, a <u>vacilação</u>, e a <u>indecisão</u>, sempre favoraveis ao egoismo.

7 – Insuficiencia da regulamentação sistematica, mesmo assistida pela teoria subjetiva dos numeros.

Impossibilidade de prever todos os acidentes da existencia coletiva e individual.

Maior simplicidade do problema coletivo comparado ao problema individual.

O emprego subjetivo dos numeros não atende sinão aos casos principaes.

Necessidade consequente de tomar sempre para criterio supremo o ascendente do altruismo.

<u>Não ha nada indiferente perante o sentimento.</u>

A principal eficacia moral do emprego subjetivo dos numeros consiste em predispôr o egoismo espontaneamente a subordinar-se ao altruismo nos casos imprevistos.

Isto resulta do conjunto das leis da animalidade.

II

Indicação geral dos resultados da regeneração positivista da teoria subjetiva dos numeros.

1 – Caráter geral destas indicações.

Precisemos estas considerações com os exemplos convenientemente escolhidos que resultão da sistematização positiva da existencia humana.

Esses exemplos hão de ser multiplicados em todo o decurso da iniciação teorica. Hoje devemos limitar-nos: a) aos que constituem a base do nosso estudo do calculo arimetico; b) aos que concorrem para sistematizar e desenvolver os resultados da educação da 1ª e da 2ª infancia.

2 – Sistematização das especulações fetichicas acerca das propriedades dos numeros.

Instituição dos numeros sagrados; sua significação positiva.

1 – União, unidade, continuidade — Amor.
2 – Arranjo, combinação — Ordem.
3 – Evolução, sucessão — Progresso.

Desenvolvimento dos numeros até 7.

Especulações geraes.

Distinção entre os numeros pares e os impares.

Importancia dessa distinção:

socialmente –

logicamente – simbolos imaginarios, etc.

Distinção mais capital entre primos e não primos.

Relativação desta noção.

3 – Base geral que resulta para o emprego da teoria subjetiva dos numeros da 1ª lei de Filosofia Primeira.

Só devemos empregar os pequenos numeros.

Na numeração continua até 7.

No emprego descontinuo os 7 primeiros primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13.

4 – Necessidade do emprego do Espaço.

Explicação do Espaço

Limite do Espaço

Côr do Espaço – Branco

Côr das impressões – verde.

Para o sentido da audição:

O Espaço deve ser suposto em silencio e as impressões provirem da voz que nos fôr mais simpatica.

Naturalmente é a voz materna.

No caso do conjunto dos sentidos do tato: fluidez, igualdade de pressão, uniformidade de temperatura connosco, estado eletrico imperceptivel.

Impressões solidas, mas lisas; temperatura superior á habitual.

5 – Base geral da regulamentação dinamica.
Calendario – Culto publico.
6 – Regulamentação da vida privada.
Sentimento – Culto domestico e pessoal
vida vegetativa
vida mental
Tratados filosoficos:
7 capitulos – Introdução e Conclusão.
Composição de cada capitulo:
3 partes
Composição de cada parte:
7 seções.
Composição de cada seção:
7 grupos de frases, separados pelos alineas usados.
Composição geral de cada grupo de frases:
O grupo medio – 7 frases.
Os outros – 5 frases.
seção inicial:
3 grupos de 3 frases.

seção inicial:
- 1º grupo – 3 frases
- 2º " – 5 "
- 3º " – 3 "
- 4º " – 7 "
- 5º " – 5 "
- 6º " – 3 " (simetricam^te^ colocados)
- 7º " – 5 "

Seção final:
7 frases aos grupos extremos

seção final
- 1º grupo – 7 frases
- 2º " – 5 frases
- 3º " – 5 frases
- 4º " – 7 frases
- 5º " – 5 frases
- 6º " – 5 frases
- 7º " – 7 frases

Composição da frase: 5 linhas impressas de 50 letras ou 250 letras.
Poema
13 cantos
3 – Introdução
7 – Desenvolvimento
3 – Conclusão.
Decomposição dos cantos.
Igualdade das estrofes e dos versos.
Composição das estrofes
Valor destas regras tanto no ponto de vista moral como no ponto de vista politico.
Indicação summaria da instituição da algebra universal, cuja apreciação fica reservada já quando consideramos a linguagem algebrica.

7 – Regulamentação da atividade coletiva.
Concepção geral.
Constituição sacerdotal.
Constituição industrial.
Numeração concreta.

III

Conclusão religiosa do estudo da teoria subjetiva dos numeros.

1 – Apreciação do conjunto da teoria subjetiva dos numeros.
A teoria subjetiva dos numeros inaugura a filosofia segunda, ligando-a á filosofia primeira pela natureza e generalidade das concepções.

2 – Apreciação especial.
Confronto da arimetica com a algebra, mostrando a superioridade da primeira.
Superioridade filosofica – estende-se a tudo; ao passo que a algebra apenas se aplica ao mundo e muito circunscritamente.
Advento da algebra. 15.ª lei universal.
Não figura nas classificações enciclopedicas da antiguidade nem da idade media.

Superioridade religiosa – aplicação.

3 – Anterioridade da teoria subjetiva a todas as nossas especulações.
Impossibilidade de sistematiza-la antes da regeneração religiosa.
Dignidade que dahi resulta.
Ligação da Logica com a Moral.
Do fetichismo com o Positivismo.
Unidade religiosa individual e coletiva.

4 – Carater da sistematização positiva;
Eliminação do teologismo, do ontologismo, e do cientismo (propriedades dos numeros)

5 – Generalização desta apreciação.
A teoria subjetiva dos numeros oferece o primeiro exemplo das vantagens reciprocas da união dos estudos inferiores aos superiores.
Moralmente, os numeros ocupão o ultimo logar na escala das abstrações positivas.
Entretanto adquirem uma dignidade permanente em consequencia da sua aplicação á regulamentação da existencia.
Sua simplicidade, e sua generalidade determi=

não a sua fixidez.

Essa fixidez persiste mesmo nos casos patologicos.

Eficacia moral.

6 — A sabedoria humana, teorica e pratica, consiste em aproveitar por toda parte esta subordinação dos fenomenos superiores aos inferiores.

7 — Necessidade de alargar desde o inicio da instrução os pensamentos dos jovens discipulos da Humanidade.

Confirmação da impossibilidade do ensino sem o predominio da fé.

A iniciação individual deve reproduzir a evolução coletiva em virtude da 3ª lei de Filosofia Primeira.

Conclusão.

A regeneração didatica sendo devida á regeneração religiosa, ela transporta naturalmente a nossa gratidão para com a fonte de tal regeneração. É assim que o estudo mais remoto da Moral, quando convenientemente instituido, tende a desenvolver os sentimentos de gratidão e humildade para com os orgãos egregios por meio dos quaes a Humanidade liga a nossa mesquinha existencia individual aos

seus gloriosos destinos. No caso especial da teoria subjetiva dos numeros, nenhum sofisma poderá agora impedir-nos de reconhecer a nossa subordinação pessoal ao sexo feminino. Essa subordinação se patentea de fato primeiro em relação ás nossas Mães, e depois, coletivamente, de todas as gerações porvir em relação á Imaculada e Terna Inspiradora da Religião Positiva. É pois com a mais perfeita justiça que no coração dos positivistas a imagem materna se combina com o vulto suave e meigo de Clotilde de Vaux. É com a maior justiça que lhe aplicamos a incomparavel denominação de Virgem-Mãe que recorda a nossa mais nobre filiação para com a Humanidade mesmo atravez de nossas Mães especiaes.

Rio, 28 de Aristoteles de 109
25 de Março de 1897.

(assinado) R. Teixeira Mendes
42. Rua B. Constant.

Ensino Positivista.

Logica

Calculo arimetico.
5.ª Lição

Concepção geral da numeração.

I

Advento, objeto, e destinação do surto sistematico da escala arimetica.

1 – Objeto e plano desta lição.

A teoria subjetiva dos numeros ligou o estudo da Filosofia Segunda ao da Filosofia Primeira, mediante a apreciação do mais simples dos fenomenos abstratos, cuja generalidade é igual á das leis universaes. Na lição de hoje devemos caraterizar a instituição fundamental por meio da qual a teoria subjetiva dos numeros se prende ao conjunto da Filosofia Segunda. Esta instituição é a numeração sistematica. Ela forma o rezultado estremo do surto

proprio á instituição subjetiva dos numeros e a base de todo o seu desenvolvimento objetivo. Ora, esse desenvolvimento objetivo constitue o ponto de partida da elaboração scientifica. A teoria da numeração se nos apresenta, portanto, como ligando e separando ao mesmo tempo a apreciação subjetiva e a apreciação objetiva dos numeros; aquela (apreciação subjetiva) devida ao fetichismo, e esta desenvolvida sob o teologismo.

Para bem apreciar semelhante instituição comecemos por lembrar os problemas numericos mais geraes a que dá logar o exame da ordem universal.

Na teoria subjetiva dos numeros (2.ª lição) vimos que esse exame começa pela fixação dos <u>seres</u> e <u>grupos de seres</u>. Quando se trata dos seres isolados, o reconhecimento da presença ou da ausencia deles exige apenas uma mera intuição. Quanto aos grupos, porem, a simples inspeção já não basta. Os grupos pódem variar ou porque se reunão novos elementos aos primeiros, ou porque outros saião, ou porque varie a disposição mutua, ou pelo concurso dessas circumstancias. De sorte que o problema de saber si se tem diante de si

o mesmo grupo, tomando unicamente em consideração a coexistencia dos elementos respetivos, decompõe-se em duas ordens de questões irredutiveis:

1.º Reconhecer si houve variação no grupo pela adjunção ou subtração de algum elemento;

2.º Verificar si houve alteração pela mudança na posição dos elementos.

Esta segunda questão é complementar da primeira, quando se trata de avaliar todos os modos de coexistencia dos diversos seres. Porque os dois problemas se reduzem então a:

1.º fixar os grupos distintos de elementos diversos;

2.º fixar os grupos <u>sucessivamente</u> possiveis com um certo numero de elementos.

O primeiro problema foi resolvido pela instituição da numeração, espontanea a principio e depois sistematica.

O segundo problema só mais tarde se apresentou e já foi resolvido com o auxilio da solução do primeiro.

A solução de ambos deve, porem, no ensino dogmatico, ser apresentada simultaneamente.

Eis porque nosso Mestre constitue a segunda parte

do calculo arimetico com as duas teorias: α) numeração; β) teoria numerica da *ordem*, isto é, da *disposição*.

Mas a teoria da numeração consta de duas apreciações sucessivas:

1º é preciso considerar os atributos geraes da numeração sistematica;

2º é preciso examinar entre todas as constituições sistematicas da escala arimetica qual a mais conveniente á vista do conjunto de nossas necessidades, moraes, intelectuaes e praticas.

A lição de hoje é consagrada á primeira de taes apreciações. Para isto vamos explicar-vos: I. O advento, objeto e destinação do surto sistematico da escala numerica; II, depois a concepção sistematica de tal escala; III, e finalmente a sua *expressão* normal.

2 — Recordação da constituição atual da escala arimetica

Antes de tudo convem recordar-vos a constituição atual da escala arimetica. Como todas as nossas construções mentaes, ela supõe uma serie de *concepções* por um lado, e por outro lado, uma serie de *sinaes* destinados a permitir a comunicação

coletiva de taes concepções. Esses mesmos sinaes servem tambem para ajudar a meditação individual.

E, como em todas as nossas construções mentaes, esses sinaes são ao mesmo tempo *fonicos* e *visuaes* e guardão entre si certa harmonia.

Devemos, pois, estudar:

a) o advento das concepções que permitirão a construção sistematica da escala numerica

b) o objeto destas concepções

c) a destinação especial que mais contribue p.ª elas

3 — Advento da numeração sistematica.

A numeração sistematica consiste em conceber de antemão todos os graus da existencia, isto é, todas as *pluralidades*.

Basta este enunciado para ver-se imediatamente que similhante problema só podia surgir depois de um imenso desenvolvimento social.

A principio a vida social só conduz a notar os objetos e os fenomenos que nos interessão diretamente. As necessidades praticas, quer militares, quer industriaes, é que vão estimulando a nossa inteligencia. E antes de um surto assaz pronunciado

da razão teorica, a Humanidade não se propõe a conhecer o que não afeta a sua vida quotidiana. Por outro lado as meditações não se podem dezenvolver sem a estabilidade social e sem o auxilio da linguagem. De sorte que todo progresso teorico ficou em breve dependente do estabelecimento da ezistencia sedentaria e do dezenvolvimento da linguagem. Antes de satisfeita essa dupla condição seria, portanto, absurdo pretender encontrar a instituição sistematica da numeração.

Predominio do sentimento para esse duplo rezultado. Culto dos mortos determinando a ezistencia sedentaria; e a ezistencia sedentaria determinando a expansão da sociedade e a complicação da ezistencia pratica; donde estimulo para o surto teorico.

Isto posto, a instituição subjetiva dos numeros tendeu a objetivar-se.

Tinhamos visto que surgidos para _classificar_, os numeros manifestarão a sua aptidão para caracterizar os grupos, isto é, para _contar_. Essa extensão conduziu em breve a _calcular_, isto é, a _combinar os numeros_ determinando o lugar do numero rezultante na escala nu-

merica. A vida sedentaria determinou o surto da ultima das aplicações subjetivas dos numeros, aquela que marca o ponto de partida decisivo de sua aplicação objetiva: _a medida_. Isto é, destinados até então ás pluralidades os numeros passarão a ser aplicados ás grandezas continuas.

Para perceber o modo pelo qual se operou essa passagem convem notar que as _pluralidades_ podem ser apreciadas já por _contagem_, já por _medida_. Esta medida foi bem cedo apreciada já pela _extensão_, já pelo _peso_. A passagem de um modo para outro foi espontaneamente determinada, pelos elementos suficientemente pequenos, ou pelos grupos muito numerosos. Em ambos os casos, a numeração, já não permitindo a contagem, a ideia mais simples foi julgar de um grupo pelo espaço que ele ocupava ou pelo _esforço_ de carregar (peso).

Isto posto é facil de apanhar a filiação entre a _classificação_ e a _medida_ e portanto o emprego dos numeros para este ultimo destino.

Toda classificação produz uma _medida_. Si se trata de grandezas discontinuas, essa _medida_ é mais ou menos

indeterminada, quanto á extensão, mas caraterisa o grupo.
Ex:

Si se trata de grandezas continuas, é preciso que os intervalos sejão iguaes. Instituição dos modulos.

Toda medida supõe classificação.

Extendida assim a aplicação dos numeros á representação das grandezas, desenvolverão-se tambem os calculos. Mas os calculos fazem-se a principio por contagem.

Essa contagem póde ser ou direta ou indireta, representando neste ultimo caso os objetos ausentes por outros de mais facil manejo. Já ha ahi um certo gráu de abstração. Calculos, seixos, sinaes concretos.

Na numeração sistematica, os sinaes tornão-se puramente abstratos, e nos calculos tendem a preponderar os sinaes visuaes ou tateis. Isto resulta da fixação exterior do sinal, e do carater mais sintetico da visão.

Todo calculo póde se fazer sempre por contagem. Mas essa contagem imediata só é possivel sem engano, por omissão ou repetição, quando os calculos são restritos; ou por ~~que~~ serem pequenos os numeros combinados, ou por

serem muito simples as combinações; ou pelo concurso das duas causas.

Então bastão quaesquer sinaes para representar os numeros sucessivos, como se vê ainda hoje entre os povos mais civilizados. Desenvolvimento que podia ter este uso.

Mas desde que os numeros se tornão consideraveis a numeração espontanea já não basta para permitir calcular com segurança e facilidade.

4 - Objeto da escala numerica.

Põe-se então o problema de estender a escala numerica suficientemente para assistir os calculos.

A possibilidade de variar de modulo permite restringir a escala.

Mas os calculos demonstrão a necessidade de estender indefinidamente a escala. Porque as combinações podem dar lugar a numeros que a escala não contivesse.

Portanto põe-se o problema de instituir de antemão todas as pluralidades imaginaveis.

5 - Destinação principal da escala numerica.

Desde que a escala se torna sistematica, ela facilita a contagem; mas a sua principal importancia

é facilitar os calculos. Mas p.ª satisfazer plenamente essa destinação a constituição sistematica da escala numerica deve atender não só á linguagem falada mas tambem á linguagem escripta.

Porque os calculos devem substituir a combinação dos numeros pela combinação dos seus sinaes. E se esses não forem convenientemente instituidos a combinação delles apresentaria dificuldades consideraveis. Haveremos de apreciar essas dificuldades quando tratarmos das avaliações.

6 – Instituição da escala pelos teocratas.

Superioridade do ponto de vista sintetico que conduziu a uma sistematização só mais tarde tentada pelas populações militares, nas quaes a conquista falhou.

7 – Instituição entre os ocidentaes.

Esforços gregos. Inferioridade desses esforços apezar da superioridade dos orgãos. Insuficiencia das reações mentaes.

Superioridade das inspirações praticas.

Extensão ás frações.

II

II

Concepção sistematica da escala numerica.

1 – Exame especial da constituição da escala
- unidade simples
- unidades compostas
- numeração concreta (peso, medidas, tempo etc)

2 – Advento do 1.º grau de composição.

Decomposição dos numeros em grupos iguaes.

Casos em que a decomposição era impossivel. Numeros expressos por uma soma.

3 – Advento do 2.º grau. Generalização das unidades compostas.

Origem social das unidades compostas.

Generalização.

Igualdade das unidades coletivas abstratas.

Antes da existencia sedentaria.

4 – Constituição sistematica de um numero qualquer.

5 – Combinação explicita de todas as avaliações diretas na constituição da escala numerica.

E, portanto, implicita das avaliações indiretas.

6 – Generalização das avaliações

Concepção de serie.

Concepção das duas progressões.

7 – Consequencias logicas.
Tipo das construções scientificas
Tipo das gerarchias
Verificação das leis de Filosofia Primeira.
Enunciado dos numeros.

III

Expressão da escala numerica

1 – Observações geraes sobre as duas linguagens, fonica e visual e sua combinação.
hieroglifos
alfabetos.

2 – Necessidade de um sistema de escrita aperfeiçoado q.ª que a numeração satisfaça o seu destino.

3 – Observação dessa condição na numeração usada.

4 – Concurso dos orientaes nessa instituição

5 – Esforços dos ocidentaes antes do surto teorico peculiar aos gregos.

6 – Esforços de Archimedes e Apolonio p.ª aperfeiçoar a notação ocidental. Insuficiencia de taes tentativas.

7 – Conclusão religiosa.

Superioridade do ponto de vista sintetico.
Ligação desse ponto de vista ao ponto de vista religioso. (teocratas)
Gratidão para com as populações fetichicas e teocraticas, inclusive os musulmanos, que forão o elo social entre os ocidentaes e os gregos com os orientaes.

Rio, 5 de Archimedes de 109
30 de Março de 1897

(assinado) R. Teixeira Mendes
42 – Rua B. Constant.

Ensino Positivista.

Logica

Calculo arimetico
6.ª Lição.

Instituição da numeração normal

I

Instituição da numeração setimal.

1 – Objeto da lição.

Na ultima lição apreciamos a constituição geral da numeração sistematica e fizemos ver que só a supremacia das inspirações religiosas permitira realizar semilhante construcção. Realçamos mesmo esta superioridade das vistas sinteticas, mostrando o contraste entre os resultados da sabedoria sacerdotal e os frutos da cultura teorica especialista servida por orgãos como Archimedes e Apolonio.

A lição de hoje vae dar maior consistencia a estas

reflexões determinando, mediante um exame que nunca fôra regularmente instituido antes de nosso Mestre, determinando, digo, a _baze_ que convem adotar-se definitivamente na numeração.

Necessidade de uma _baze fixa_: importancia geral da _fixidez_ de nossas concepções habituaes, como destinadas a exprimir as relações entre o abstrato e o concreto.

Fixidez dos signaes – Conjunto das leis de Filosofia Primeira – especialmente as leis estaticas do entendimento.

Limites naturaes da _baze_.

Inconvenientes das bazes grandes:

1.º numero de carateres

2.º numero das combinações elementares a reter de cór.

Inconvenientes das bazes pequenas:

1.º Sobrecarga da escrita

2.º Enganos pela frequente repetição dos mesmos sinaes.

Necessidade de examinar a conveniencia da baze vulgarmente adotada na numeração abstrata.

Singularidade de que tal baze conviesse definitivamente.

Impossibilidade do exame antes do Pozitivismo.

1.º elementos

2.º condições da sintese.

Condições do exame:

Acordo entre a numeração abstrata e a concreta.

Pozição do problema desde o fim da idade media. Pozição definitiva pela Revolução Franceza.

Indivizibilidade da sintese – Construcção provisoria.

Aparencias sistematicas quanto aos detalhes. Resolução empirica dominando o conjunto.

Importancia dessa tentativa:

Pôr o problema socialmente.

Nenhum problema póde ser definitivamente posto sem uma solução qualquer.

Conflito entre a numeração abstrata e a concreta.

Calendario – Semana.

O malogro conduziu nosso Mestre a estudar a questão e a resolvê-la.

Antes tinha instituido o Calendario.

Reflexões acerca dos inconvenientes das reformas prematuras.

Provada dogmatica e historicamente a necessidade de escolher a baze, e firmados os principios geraes que devem prezidir a essa escolha, podemos conceber o objeto e o plano desta lição.

Examinaremos sucessivamente:

I Instituição da numeração normal.

II Apreciação filozofica dos calculos necessarios p.ª mudar o sistema em que os numeros se achão reprezentados

III Apreciação geral da reforma da numeração concreta.

2 – Escolha da baze.

Para esta escolha devem concorrer:

1.º motivos sistematicos rezultantes da teoria subjetiva dos numeros.

2.º motivos religiozos, rezultantes do exame da apreciação da evolução humana.

Propriedades subjetivas de 7.

3 + 3 + 1

2 + 3 + 2

2 + 2 + 3 depois sete.

Donde se conclue:

Concepção das pluralidades: sete é o maior grupo que podemos distintamente conceber com os numeros concretos, concepção das grandezas continuas: sete marca o limite das divizões que podemos diretamente conceber.

Os numeros primos inferiores a sete serião muito pequenos, os superiores muito grandes.

Antecedentes da numeração setimal.

Incoherencia da numeração.

Coezistencia de sete e dez, etc

Fetichismo.

Fetichocracia – Fohi. linhações.

Teocracia – Judaismo. Semana.

Apoio das populações.

Confirmação pelo conflito francez

Superioridade do empirismo popular sobre o cientismo.

3 – Escolha da baze; deve ser considerada como datando desse conflito.

Augusto Comte a adóta no calendario.

Rezolve sistematizá-la.

4 – Leibnitz – apreciação desse antecedente filozofico.

1703 – Apreciação sumaria da numeração binaria.

Explicação das linhações atribuidas a Fohy.[1]

(1) Ver no fim da lição.

5 _ Vantagens especiaes.
Facilita os calculos diminuindo o numero das combinações elementares a reter de cór.
6 _ Importancia historica.
Harmonia entre o Fetichismo e o Positivismo. Criterio dinamico das inspirações estaticas.
Explicação da base decimal.
Necessidade de augmentar a taxa de grupamentos enquanto a sistematização da escala estava limitada aos primeiros graus.
Introdução de outros grupos _ duzia _ vintena _
Filiação á arimetica ~~[illegible]~~ decimal:

3^2+1

$7+3$

7 _ Conclusão.
Sistematização de uma tendencia anterior á numeração decimal.
Esta foi empiricamente preferida como tendo satisfeito a uma necessidade pratica que resultava da imperfeição da coordenação abstrata.
Preponderancia dos motivos religiosos sobre as inspirações teoricas e praticas.

II.

Apreciação filosofica dos calculos necessarios p.a mudar o sistema em que os numeros se achão apresentados.
1 _ Concepção concreta do problema.
Determinão-se sucessivamente na ordem ascendente as unidades de diversas ordens.
2 _ Concepção da solução abstrata.
Depende : 1º do sistema em que se quer fazer os calculos
2º dos calculos que se pretende realizar.
3º da ordem segundo a qual se quer determinar as unidades sucessivas.
3 _ Passar de um sistema p.a outro contando:
1º _ Se servir da escala em que o numero está dado
2º _ Se servir da escala do sistema pedido
3º _ Se servir de uma escala diversa dos dois sistemas.
4 _ { Passagem servindo-se da adição
Passagem servindo-se da subtração
5 _ Passagem servindo-se da multiplicação
6 _ Passagem servindo-se da divisão.
7 _ Conclusão.

III

III

Apreciação da reforma da numeração concreta.
(Vide a Sintese, p. 132 a 135)

Nota á 6ª Lição.

N. LXVIII.

Explication de l'Arithmétique binaire.

Qui se sert des seuls caractères 0 et 1; avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy (a)

Tirée des mémoires de l'Académie des Sciences de Paris an. 1703.

Le calcul ordinaire d'Arithmétique se fait suivant la progression de dix en dix. On se sert de dix caractères, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui signifient zéro, un, deux et les nombres suivants jusqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, et on écrit dix, par 10; et dix fois dix, ou cent, par 100; et dix fois cent, ou mille, par 1000; et dix fois mille par 10000. Et ainsi de suite.

Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ai employé depuis plusieurs années la progression plus simple de

(a) Voyez le numero 58

toutes, qui va de deux en deux; ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de la science des Nombres. Ainsi je n'y emploie point d'autres caractères que 0 et 1, et puis allant à deux, je recommence. C'est pourquoi deux s'écrit ici par 10, et deux fois deux ou quatre par 100; et deux fois quatre ou huit par 1000; et deux fois huit ou seize par 10000, et ainsi de suite. Voici la Table des Nombres de cette façon qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12

On voit ici d'un coup d'œil la raison d'une propriété célèbre de la progression Géométrique double en Nombres entiers, qui porte que si on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut composer tous les autres nombres entiers au dessous du double du plus haut degré. Car ici, c'est comme si on disait, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux et un;

100	4
10	2
1	1
111	7

Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre et un.

1000	8
100	4
1	1
1101	13

Cette propriété sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, et pourrait servir dans les monnaies pour donner plusieurs valeurs avec peu de pièces.

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire très facilement toutes sortes d'opérations.

Pour l'Adiction, D par exemple.

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la subtraction

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

⊙

Pour la multiplication.

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

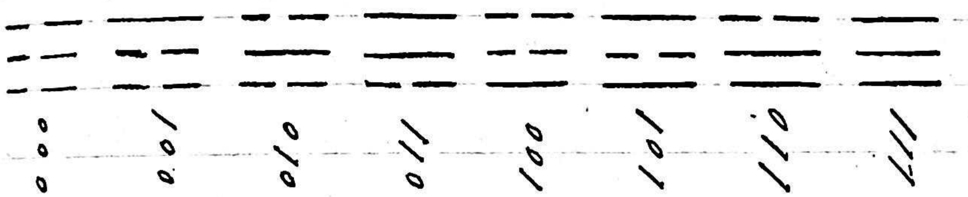
Et toutes ces opérations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non plus de rien apprendre par cœur ici, comme il faut faire dans le

calcul ordinaire, où il faut savoir par exemple que 6 et 7 pris ensemble font 13, et que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve et se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédents sous les signes D et ⊙.

Cependant je ne recommande point cette manière de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix: Car outre qu'on est accoutumé à celle-ci, on n'y a point besoin d'y apprendre ce qu'on a déjà appris par cœur; ainsi la pratique par dix est plus abrégée, et les nombres y sont moins longs. Et si on était accoutumé à aller par douze ou par seize, il y aurait encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est-à-dire, par 0 et par 1, en récompense de sa longueur est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géométrie; dont la raison est que les nombres étant réduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paraît partout un ordre merveilleux. Par exemple, dans la Table même des Nombres, on voit en

chaque colonne régner des périodes qui recommencent toujours. Dans la première colonne c'est 01, dans la seconde c'est 0011, dans la troisième 00001111, dans la quatrième 0000000011111111 et ainsi de suite. Et on a mis de petits zéros dans la Table pour remplir le vide au commencement de la colonne, et pour mieux marquer ces périodes. On a mené aussi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours sous elles. Et il se trouve encore que les Nombres Quarrés, Cubiques, et d'autres puissances; item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux et autres nombres figurés ont aussi de semblables périodes: de sorte qu'on en peut écrire les Tables tout de suite, sans calculer. Et cette prolixité dans le commencement, qui donne ensuite le moyen d'épargner le calcul, et d'aller à l'infini par règle, est infiniment avantageuse.

Ce qu'il y a de surprenant dans ce calcul, c'est que cette Arithmétique par 0 et 1 se trouve contenir le mystère d'un ancien Roi et Philosophe nommé Fohy, qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans, et que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire et de leurs sciences. Il y a plusieurs figures linéaires qu'on lui attribue, elles reviennent toutes à cette Arithmétique; mais il suffit de mettre ici la Figure de huit Cova comme on l'appelle, qui passe pour fondamentale, et d'y joindre l'explication qui est manifeste, pourvu qu'on remarque premièrement qu'une ligne entière —— signifie l'unité ou 1, et secondement qu'une ligne brisée — — signifie le zéro ou 0.



0 1 10 11 100 101 110 111

0 1 2 3 4 5 6 7

Les Chinois ont perdu la signification des Cova ou Liniations de Fohy peut-être depuis plus d'un millénaire d'années; et ils ont fait des Commentaires là-dessus, où ils ont cherché je ne sais quels sens éloignés. De sorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vint maintenant des Européens; voici comment: Il n'y a guère plus de deux ans que j'envoyai au R. P. Bouvet, Jésuite François célèbre, qui demeure à Pékin,

ma manière de compter par 0 et 1; et il ne m'en fallut pas davantage pour lui faire reconnaître que c'est la clef des figures de Fohy. Ainsi, m'écrivant le 14 Novembre 1701, il m'a envoyé la grande figure de ce Prince Philosophe qui va à 64, et ne laisse plus lieu de douter de la vérité de notre interprétation; de sorte qu'on peut dire que ce Père a déchiffré l'énigme de Fohy, à l'aide de ce que je lui avais communiqué. Et comme ces figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde, cette restitution de leur sens, après un si grand intervalle de temps, paraîtra d'autant plus curieuse.

Le consentement des figures de Fohy et de ma Table des Nombres se fait mieux voir lorsque dans la Table on supplée les zéros initiaux, qui paraissent superflus, mais qui servent à mieux marquer la période de la colonne comme je les y ai suppléés en effet avec des petits ronds pour les distinguer des zéros nécessaires, et cet accord me donne une grande opinion de la profondeur des méditations de Fohy. Car ce qui nous paraît aisé maintenant, ne l'était pas tant dans ces temps éloignés. L'Arithmétique Binaire, ou Dyadique, est en effet fort aisée

aujourd'hui, pour peu qu'on y pense, parce que notre manière de compter y aide beaucoup, dont il semble qu'on retranche seulement le trop. Mais cette arithmétique ordinaire par dix ne paraît pas fort ancienne, au moins les Grecs et les Romains l'ont ignorée, et ont été privés de ses avantages. Il semble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape sous le nom de Sylvestre II, qui l'a eue des Maures d'Espagne.

Or, comme l'on croit à la Chine que Fohy est encore auteur des caractères chinois, quoique fort altérés par la suite des temps, son essai d'Arithmétique fait juger qu'il pourrait bien s'y trouver encore quelque chose de considérable par rapport aux nombres et aux idées, si l'on pouvait déterrer le fondement de l'écriture chinoise, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établissant. Le R. P. Bouvet est fort porté à pousser cette pointe, et très capable d'y réussir en bien des manières. Cependant je ne sais s'il y a jamais eu dans l'écriture chinoise un avantage approchant de celui qui doit être nécessaire

ment dans une Caractéristique que je projette. C'est que tout raisonnement qu'on peut tirer des notions, pourrait être tiré de leurs Caractères par une manière de calcul, qui serait un des plus importants moyens d'aider l'esprit humain.

(Leybnitz)

Ensino Pozitivista

Logica.

Calculo arimetico

7ª Lição.

Teoria numerica da ordem

(Permutações, arranjos, combinações e repartições)

I

Pozição da questão.

1 _ Objeto da lição.

A numeração teve por objeto inaugurar o estudo abstrato da ordem, apreciando-o sob o aspeto mais simples. Com efeito, conforme por vezes temos ponderado, o conhecimento pozitivo da ordem consiste em determinar os entes que nos interessão, e as relações que eles tem entre si ou commosco ou que essas relações nos podem afetar. Nesse ponto de vista, o problema preliminar consiste em fixar os diversos graus da coexistencia subjetiva ou objetiva; o que se consegue classificando as diversas pluralidades e as diversas gran=

dezas continuas.

Mas, ao passo que a *medida* permite distinguir completamente as grandezas continuas entre si, o *numero* não basta para caraterizar as pluralidades sob o simples aspeto da coexistencia. Por isso que as pluralidades objetivas ou subjetivas podem constar dos mesmos elementos e entretanto diferirem; α) entre si e β) em relação a nós pela disposição mutua desses elementos.

Exemplos:

Assim se tomarmos as côres fundamentaes do *arco iris*, subjetivamente fixadas em *sete*, poderemos obter paineis distintos mudando simplesmente a colocação das côres.

Se tomarmos a escala musical fundamental tambem subjetivamente fixada em sete sons, poderemos obter *melodias* diferentes modificando simplesmente a sucessão dos sons.

Alem disso, esses elementos podem ser grupados dois a dois, tres a tres, etc e os grupos formados podem variar ou não, conforme a natureza da disposição.

Vimos que as avaliações quaesquer baseião-se nas avaliações dos casos em que só se considerão numeros simples tomados dois a dois. Ora, quando se trata da soma e da multiplicação, a ordem dos elementos não altera o rezultado; mas essa ordem afeta o *resto* ou o *quociente*.

Resulta d'ahi que para distinguir as pluralidades entre si não basta saber que os mesmos elementos coexistem nellas; é necessario ter tambem certeza de que a arrumação não mudou. Ora, a solução deste segundo problema pode interessar-nos sob dois pontos de vista:

α) Trata-se de distinguir *concretamente* as disposições, para escolher, por ex. entre ellas; e a questão não póde ser rezolvida sinão classificando todas as *arrumações* realizaveis.

β) Outras vezes interessa-nos unicamente saber si já tomamos em consideração todas as disposições possiveis. Esta ultima apreciação é mesmo indispensavel para completa solução do caso precedente. Porque a escolha não póde ser decisiva sinão tendo examinado todas as hipoteses possiveis, ou tendo reconhecido

a impossibilidade de tal exame.
Assim, em resumo, no conjunto dos problemas de que se trata, o primeiro ponto a examinar é o numero das disposições possiveis.
A determinação de tal numero depende da natureza da arrumação e do numero dos elementos considerados. Mas em qualquer das hipoteses o problema não póde ser resolvido sinão pela classificação dos grupamentos possiveis. Esta é a operação indispensavel. Uma vez formada a gerarchia, os seus termos podem ser caraterizados pelos numeros ordinalmente empregados, ou por quaesquer outros sinaes. E esses sinaes poderião, como os numeros, transformarem-se de ordinaes em cardinaes, para caraterizar a totalidade das arrumações possiveis em cada caso, quando se abstraisse das arrumações para só considerar a sua existencia possivel.
Comprehende-se porem, que o mais simples é utilizar-se da escala numerica que já se achava constituida.
Quer, porem, se sirva dessa escala, quer se inventassem novos sinaes especiaes para marcar a gerar-

chia das disposições, o indispensavel era apanhar as leis segundo as quaes o numero das disposições se liga aos dois numeros dados, a saber:
α) numero total de objetos.
β) taxa de grupamento.
Ora, essa lei é apanhada pela inducção só, ou assistida pela deducção; e a preponderancia do ponto de vista subjetivo é só quem permite dar-lhe a forma mais adequada, isto é, só a construcção permite dar a essas leis a constituição final.
Consideradas em si, essas leis podem ser sinão as mesmas que já forão utilizadas pa a construcção da escala numerica.
Conclue-se do que precede que: α) se o problema é um complemento daquele que conduziu á instituição da numeração sistematica; β) se a sua solução se baza tambem na classificação; γ) se a escala numerica é quanto se torna bastante para facilitar esta solução; δ) se as relações entre os numeros e as transformações correspondentes não exigem a distinção explicita entre o ponto de vista arimetico e o algebrico; — a teoria de que se trata deve ser apreciada

no calculo aritmetico e não no calculo algebrico como se faz no regimem academico.

Por outro lado, o ensino positivista sistematizando e dezenvolvendo a instrução da infancia, não pode separar da numeração a solução deste problema, sob o pretesto das avaliações que ele exige. Porque essas avaliações já são conhecidas. Mas mesmo que o não fossem, basta que elas sejão comprehensiveis desde já com os elementos que a numeração supõe, para que não se justificasse o rompimento de uma conexão tão intima. Não é possivel condensar em poucos anos a evolução mental da especie sem subordinar continuamente a razão individual á fé coletiva.

Estas considerações determinão o objeto da nossa lição de hoje.

2 — Apreciação especial dos diversos problemas que constituem a teoria numerica da ordem.

1º Permutações — Chamão-se permutações as diversas disposições que se podem formar com um certo numero de elementos, considerados no seu conjunto.

2º Arranjos — Chamão-se arranjos as diversas

disposições que se podem formar com um certo numero de elementos, grupando-os dois a dois, tres a tres, quatro a quatro, etc.

Conexão entre esse problema e o das permutações. O problema das permutações coincide com o dos arranjos quando se supõe que a taxa do grupamento é igual ao numero total dos elementos.

3º Combinações — Chamão-se combinações as diversas disposições que se podem formar com um certo numero de elementos, grupando-os dois a dois, tres a tres, quatro a quatro, etc, com a condição dos grupos diferirem pelo menos por um objeto.

3 — Das diversas marchas que se pode seguir para solução.

Cada um desses problemas pode ser rezolvido em separado, ou fazendo-o recahir em qualquer dos outros. Vantagem logica de apreciar ambas as marchas, pelas observações geraes que suscitão.

Preferencia filosofica da marcha indireta pela ligação que estabelece entre os tres problemas. Variedade nessa marcha indireta e necessidade do predominio do ponto de vista religioso. 1ª decidir

a ligação preferivel.

4 – Solução direta do problema das permutações.

Considerem-se dois objetos: 2 permutações.

Se forem três elementos: fixe-se o 1.º e formem-se as permutações com os dois restantes, colocando depois no começo de cada permutação o elemento reservado. Obtem-se assim as duas permutações de três objetos que começão pelo 1.º. Mas essa operação pode ser repetida com o 2.º e depois com o 3.º elemento; e de cada vez teremos duas permutações de três objetos. Logo o numero total das permutações será 2 mais 2 mais 2 ou três vezes dois.

Consideremos 4 objetos: fixe-se o 1.º e formem-se as permutações dos 3 restantes, colocando depois no começo o objeto reservado. Teremos tantas permutações dos quatro objetos quantas fôrem as que se obtem com três, isto é, três vezes 2. E como esta operação se pode repetir quatro vezes, o numero total das permutações dos quatro objetos será 4 vezes 3 vezes 2.

As mesmas considerações mostrarião que com 5 objetos ter-se-ião 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2 permutações.

Desde então a indução nos leva a reconhecer que o

total de permutações que se podem formar com um numero dado de objetos é igual ao produto dos fatores continuamente decrecentes desde esse numero inclusive até 2.

Esse ennunciado, porem, não é o mais comodo, e a Humanidade o transformou. É aqui que intervem o metodo construtivo. Refletindo que a ordem dos fatores não altera o produto, e que este não muda quando se introduz como fátor a unidade, a Humanidade instituiu o ennunciado sistematico: O numero de permutações é o produto de toda a escala numerica até o numero total de objetos a permutar inclusive.

5 – Solução direta do problema dos arranjos.

Para resolver este problema sigamos a marcha precedente, conforme a regra de Descartes, que mostrou que o espirito matematico consistia em decompôr as questões em tantos casos sucessivamente mais simples quantas fôssem necessarias.

O caso mais simples é o dos arranjos dos objetos 2 a 2.

Grupe-se o primeiro objeto com os seguintes: ter-se-ião tantos arranjos de dois objetos quantos forem os objetos menos um. E como a operação pode ser repetida tantas vezes quantas forem os objetos, o total dos arranjos dois a dois será o produto de dois fatores consecutivos dos quaes o maior é igual á totalidade dos objetos.

Caso dos arranjos trez a trez.

Grupe-se o primeiro objeto com os arranjos dois a dois dos seguintes. Obtem-se assim tantos arranjos contendo 3 objetos quantos forem os arranjos dos objetos seguintes dois a dois. E, como essa operação pode ser repetida tantas vezes quantos forem os objetos, o total dos arranjos será um produto de trez fatores consecutivos, dos quaes o maior é o total dos objetos.

Repetindo o mesmo processo se verificaria que no caso dos arranjos 4 a 4, o total era representado pelo produto de 4 fatores consecutivos, dos quaes o maior é igual ao total dos objetos.

Desde então a indução nos conduz á lei geral.

O numero dos arranjos quaesquer equivale ao produto de uma serie continua de fatores decrescentes, a partir do numero total dos objetos, até que o numero dos multiplicadores atinja á taxa de grupamento.

O metodo construtivo sistematiza esse enunciado sem alterá-lo, como sendo o mais simples que a questão comporta. Eis o outro enunciado: O numero dos arranjos quaesquer equivale ao produto de uma serie continua de fatores crescentes, começando imediatamente depois da diferença entre a totalidade dos objetos e a taxa de grupamento e indo até que o numero dos multiplicadores atinja a essa taxa.

6 – Solução direta do problema das <u>combinações</u>.

Formando a hipotese mais simples com os dados de que dispomos, somos levados a imitar a marcha seguida na solução do problema dos arranjos.

Combinações: – Reflexões sobre esta palavra que ficou para designar os grupamentos mesmo em que entrão mais de dois objetos.

Toda combinação direta é binaria.

Combinações dos objetos dois a dois.

Grupando o primeiro com os seguintes tem-se tantas

combinações de dois objetos quantos forem estes menos 1.
Passando ao segundo, note-se que ele já foi combinado com o 1º; só resta, portanto, combiná-lo com os seguintes. Teremos assim tantas combinações quantos forem os objetos menos 2.
Passando ao 3º, só devemos combiná-lo com os seguintes, o que dará tantas combinações quantos forem os objetos menos 3.
E assim por diante até o penultimo que, combinado com o ultimo, só dará uma combinação.
O numero total das combinações dos objetos dois a dois será, portanto, a soma da serie continua das parcelas decrescentes desde o numero imediato ao dos objetos a combinar.
O metodo construtivo leva a preferir um outro enunciado invertendo a ordem das parcelas.
O numero das combinações dos objetos dois a dois é igual á soma de toda a serie numerica até o total dos objetos a combinar exclusive.
Combinações tres a tres. Neste caso grupa-se o primeiro objeto com as combinações dos restantes dois a dois. Teremos tantas combinações de tres

objetos quantos forem as dos objetos restantes dois a dois. Esse numero é dado pela soma da escala numerica até o total dos objetos menos dois.
Grupando depois o 2º com as combinações dos seguintes dois a dois teriamos um numero de combinações de tres objetos equivalentes á soma da escala numerica até o total dos objetos menos tres.
E assim por diante.
De sorte que o numero total das combinações seria representado por uma soma em que as parcelas serião os termos sucessivos da serie que resultaria da escala numerica somando cada termo com o conjunto dos anteriores. O numero de termos a considerar em cada caso seria igual ao total dos objetos menos dois.
Imagem geometrica desses numeros: <u>numeros figurados</u>.
Generalização do problema da multiplicação. Enuncio geral do espirito da solução. Problema geral das series.
Complicação da avaliação das combinações para

esta marcha.
Necessidade de tentar outra solução mais simples e desde então menos espontanea.
Solução que se encontra na Algebra de Clairaut (Pag. 148 e seguintes).
Para achar o numero de combinações dos objetos dois a dois, notemos que se as combinações estivessem formadas, o numero de objetos representados nelas seria duplo do numero de combinações, pois que em cada combinação figurarião dois objetos.
Notemos em seguida que cada objeto deve ser repetido o mesmo numero de vezes, e que como não pode ser combinado comsigo mesmo e sim com todos os outros, só póde ser repetido tantas vezes quantos forem os objetos menos um.
Portanto o numero de objetos a considerar é o produto do numero total dos objetos por esse numero menos um.
E o numero de termos será a metade desse produto.
Ex:
Procuremos saber quantas somas distintas podemos fazer com os 5 primeiros numeros. Se tivessemos indicado todas essas somas teriamos escrito um numero de algarismos duplo do numero de somas.
Demais, cada algarismo figuraria o mesmo numero de vezes. Assim 1 figuraria com todos os seguintes, isto é, 4 vezes; 2 figuraria com os seguintes e já figurava com 1; ao todo 4 vezes. O mesmo se diz de 3, etc.
Portanto cada algarismo figurava 4 vezes. Mas os algarismos sendo 5 e cada um figurando 4 vezes, nós teriamos escrito ao todo 5 vezes 4 algarismos. Mas um numero de algarismos é o duplo das somas em que eles figurão. Logo o numero das somas distintas é a metade do produto de 5 e 4.
Portanto, o numero de combinações dos objetos dois a dois é igual á metade do produto de dois fatores consecutivos dos quaes o maior é igual á totalidade dos objetos.
Consideremos agora as combinações trez a trez. Raciocinio analogo. Supponhamos que se trata da soma dos seis primeiros numeros trez a trez. Indicando as somas, vê-se que o numero delas é um terço do numero de algarismos escritos, pois que cada soma contem trez algarismos.
Demais, cada algarismo ha de ser escrito o mesmo numero de vezes e tantas vezes quantas forem as

somas dos restantes dois a dois, isto é, metade de 5 vezes 4 pelo que acabamos de ver. E como os algarismos são em numero de 6, o total dos algarismos escritos será a metade de 6 vezes 5 vezes 4. E, portanto o numero de somas distintas que é um terço será reprezentado por uma fração em que o numerador é o produto de 6 por 5 e por 4 e o denominador o produto de 2 por 3.

Intervenção do metodo construtivo: formula normal. Para ter a formula normal convem igualar o numero de fatores de ambos os termos da fração, o que exige que se introduza a unidade como fator do denominador. Chega-se assim a este enunciado:

O numero de combinações de 6 objetos 3 a 3 equivale a uma fração em que o numerador é o produto de 6 por 5 e por 4 e o denominador é o produto de 1 por 2 e por 3.

O mesmo raciocinio nos levaria a reconhecer que no caso de 10 objetos combinados 4 a 4, o numero de combinações equivale a uma fração em que o numerador é o produto de 10 por 6 por 5 e por 4, e o denominador é o produto de 1 por 2 por 3 por 4.

<u>Indução geral</u>. A comparação desses rezultados particulares nos leva a concluir a regra geral:

O numero total das combinações quaesquer equivale a uma fração em que o numero é o produto de uma serie continua de fatores decrescentes a partir da totalidade dos objetos, até que o numero de multiplicadores atinja á taxa de grupamento; e o denominador é o produto de um numero igual de termos da escala numerica.

7 – Conexão entre os trez problemas revelada pela comparação desse enunciado com os que rezultão dos problemas das permutações e dos arranjos.

O enunciado precedente mostra que o numero de combinações quaesquer equivale ao dos arranjos analogos dividido pelo das permutações correspondentes ao grupamento.

II

Solução sistematica.

1 – Comparação dos trez problemas.

Gerarchia da dificuldade. O conjunto das considerações precedentes mostra que o problema das permutações é o mais facil e o das combinações o mais dificil. As formulas que mostrarão a solução dos

tres problemas resumem esta conclusão.

O encadeamento normal consiste pois em reduzir as combinações aos arranjos e estes ás permutações. Mas ha utilidade logica em considerar os outros dois encadeamentos, sobretudo para relativar as nossas concepções, e patentear que só o ponto de vista subjetivo permite sistematizal-os definitivamente.

2 _ Redução das combinações aos arranjos por intermedio das permutações.

Esta redução se opera notando-se que, se as combinações estivessem formadas, cada uma produziria tantos arranjos quantas permutações comportasse. Donde se conclue que o numero de combinações quaesquer é igual ao dos arranjos analogos dividido pelo das permutações correspondentes.

Tal é a formula a que haviamos chegado ha pouco diretamente.

Racionalmente apreciada, esta transformação embaraça a solução, pois que os arranjos, conquanto mais numerosos do que as combinações, são mais faceis de contar, como comportando melhor um classamento isento de engano.

3 _ Redução dos arranjos ás permutações.

E' preciso agora reduzir a enumeração dos arranjos á das permutações, mediante uma consideração inteiramente similhante áquela que fornece a primeira redução do triplice problema.

Colocando em seguida de cada arranjo todas as permutações dos objetos que ele não abraça, produzir-se-ião todos os que comporta o numero total dos objetos.

Por esse quadro vê-se que o numero dos arranjos quaesquer multiplicado pelo numero de permutações do grupamento inverso (1) dá o numero de permutações da totalidade dos objetos.

Por conseguinte, o numero dos arranjos quaesquer equivale ao das permutações da totalidade dividido pelo das permutações do grupamento inverso.

Reação desta formula sobre a anterior das combinações:

(1) Grupamento inverso é o grupamento em que a taxa é a diferença entre a totalidade e a taxa de arranjo.

Pode-se, pois, considerar o numero das combinações como igual ao das permutações totaes dividido pelo produto dos dois numeros de permutações parciaes que correspondem, primeiro aos objetos grupados, depois aos objetos não grupados.

4 — Solução direta do problema das permutações.

Devemos agora completar a solução instituindo a lei das permutações que não oferecem dificuldade, mediante a subordinação gradual dos diferentes casos.

Com efeito, para apanhar essa subordinação, suponhamos que se tem as permutações de uma ordem e que se quer determinar as da ordem seguinte.

Basta a cada uma das permutações que se tem juntar o novo objeto de modo que ele ocupe sucessivamente todos os lugares. É então evidente que:

Cada permutação de uma ordem qualquer fornece no grau seguinte, um numero igual ao dos objetos finalmente permutados.

Assim, por exemplo, se se tivessem as permutações de 5 objetos e se quizessem as permutações de 6 objetos, basta a cada permutação de 5 objetos juntar o 6º. objeto de modo que ele ocupe sucessivamente o 1º, o 2º, o 3º. . . . até o 6º. lugar. Para cada permutação de 5 objetos nós teremos pois 6 permutações de 6 objetos.

Partindo, portanto, de 2 objetos, acha-se facilmente a lei. Com efeito, 2 objetos dão 2 permutações e cada uma fornece 3 permutações de 3 objetos.

Portanto o numero das permutações de 3 objetos equivale ao produto de 2 por 3. Mas cada permutação de 3 objetos fornece 4 permutações de 4 objetos; portanto as 2 vezes 3 fornecerão um numero indicado pelo produto de 2 por 3 e por 4. Introduzindo, pois, o fator 1 reconhece-se por ahi que a formula das permutações se torna o produto de toda a escala numerica até o numero total dos objetos a permutar inclusive.

5 — Solução final dos problemas dos arranjos e das combinações.

Obtida essa enumeração das permutações, cumpre subir dela á dos arranjos primeiro, e depois á

das combinações, segundo as leis acima estabelecidas.

A formula dos arranjos consistia em uma fração na qual o numerador era numero de permutações da totalidade e o denominador era o numero de permutações do grupamento inverso.

Essa formula se torna pois em uma fração na qual o numerador é o produto de toda a escala numerica até o numero total dos objetos a permutar inclusive; e o denominador é produto de toda essa escala até o numero de objetos do grupamento inverso inclusive.

Ela pode, pois, tomar a forma inteira, pois que todos os fatores do denominador achão-se necessariamente reproduzidos no numerador.

Para achar-se esse enunciado inteiro, note-se que o maior fator do denominador é a diferença entre a totalidade dos objetos e a taxa dos arranjos. Portanto o numero dos fatores que ficão no numerador depois da simplificação é igual a essa taxa. Vê-se pois, que:

Reduzida á sua mais simples expressão o numero dos arranjos quaesquer equivale ao produto de uma serie continua de fatores decrescentes, a partir do

numero total dos objetos, até que o dos multiplicadores atinja a taxa do grupamento.

Dahi resulta a formula final das combinações. Tinhamos visto que ela era igual a um quociente no qual o dividendo era o numero das permutações totaes e o divisor era o produto dos dois numeros de permutações parciaes que correspondem, primeiro aos objetos grupados, depois aos objetos não grupados.

Essa formula torna-se pois uma fração em que o numerador é o produto de toda a escala numerica até o numero total dos objetos a permutar inclusive; e o denominador o produto dos dois produtos parciaes que correspondem, um a toda escala numerica até o numero de objetos grupados, o outro, a toda essa escala até o numero de objetos não grupados.

Ela pode pois simplificar-se, pois que todos os fatores de um dos dois produtos parciaes do denominador entrarão evidentemente no numerador. Essa simplificação, porem, não faz a formula perder o aspeto fracionario, embora pela natureza da questão ela deva exprimir um numero inteiro. Mas a maneira pela qual se opera a simplificação merece ser assinalada pelos resultados a que ela

conduz.

Com efeito, note-se em primeiro lugar que o numero de fatores do denominador é igual ao numero de fatores do numerador. Em segundo lugar, esses fatores do deno= minador entrão na constituição de dois productos par= ciaes que correspondem, um aos objetos grupados, o outro aos objetos não grupados. Cada um desses pro= ductos parciaes tem, pois, em geral numero de fa= tores diferentes. Eles não podem mesmo constar de igual numero de fatores senão quando a totali= dade dos objetos for par.

Isto posto, a simplificação se faz pela supressão dos fatores do denominador que evidentemente existem no numerador. É claro, pois, que no denominador ficará o menor dos dois productos parciaes.

Ora, si esse menor producto corresponde aos objetos grupados, a formula final indicará que:

O numero de combinações quaesquer é igual ao quociente do dos arranjos analogos dividido pelo das permutações do grupamento. Porem, si o menor dos dois productos parciaes do denominador correspon= de aos objetos não grupados, a formula simplificada

das combinações nos indica que o numero das combinações quaesquer é igual ao numero das combinações inversas.

A mesma formula indicará a relação entre as combinações, os arranjos analogos e as permutações correspondentes, limitando-nos a suprimir em ambos os termos o fator que corres= ponde aos objetos não grupados.

Vê-se, pois, pela formula das combinações, que, á medida que a taxa de combinação cresce, o numero das combinações cresce até que o numero de objetos grupados seja igual á metade da totali= dade, si se trata de numero par, ou essa metade por falta, si se trata de numero impar. A partir desse limite o numero de combinações vae dimi= nuindo, fornecendo resultados simetricamente iguaes aos anteriores.

A formula dos arranjos pelo contrario indica que o numero de arranjos cresce á medida que a taxa aumenta até confundir-se com o numero das permutações da totalidade.

6 — Concepção geral dos outros dois meadea=

mentos.

Substituido assim o encadeamento normal desses tres problemas, examinemos, a titulo de exercicio logico, os outros dois encadeamentos que elles comportão. Começemos por ver como os tres problemas podem depender do dos arranjos.

Já vimos acima que o problema das combinações recahe no dos arranjos por meio do das permutações. Portanto p.a ficar tudo dependendo dos arranjos basta mostrar como a enumeração das permutações pode reduzir-se á dos arranjos.

Nesse intuito, basta refletir (1) que, si tivermos os arranjos no caso da taxa de grupamento ser igual á totalidade dos objetos menos um, para ter as permutações bastava juntar a cada arranjo o objeto que elle não contivesse.

Donde se conclue que o numero de permutações da totalidade coincide com o numero de arranjos,

---

(1) Esse raciocinio é apenas a consideração de um caso especial do que foi acima indicado para reduzir os arranjos ás permutações.

quando só um objeto fica fóra do grupamento.

Esta observação permitte formular a lei das permutações quando a dos arranjos fôr conhecida.

Ora já mostramos qual era essa lei examinando diretamente o problema dos arranjos. Em virtude della, o numero das permutações equivale ao produto de uma serie continua de fatores decrescentes desde a totalidade até 2. Introduzindo o fator um e invertendo a ordem dos fatores chega-se ao enunciado normal.

Quanto á formula das combinações, torna-se uma fração em que o numerador é o numero de arranjos analogos e o denominador o numero de arranjos dos objetos grupados, na hipotese da taxa ser igual á do grupamento menos um. Esta formula coincide com a que já foi achada.

Vejamos finalmente como é possivel reduzir os tres problemas ao das combinações.

Para isso, notemos que só nos falta exprimir as permutações por meio das combinações, porque já temos a lei que liga os tres problemas entre si.

Ora, primeiro as permutações por meio das combinações, imaginemos que conhecemos as combinações de um certo numero de objetos, na hipotese de ser a taxa de grupamento igual a' totalidade menos um. Para ter as permutações, bastaria então permutar os objetos de cada combinação e juntar a cada rezultado o objeto que ele não contivesse.

Por exemplo, se tivermos as combinações dos 3 primeiros numeros dois a dois:

12, 13, 23

e quizermos ter as permutações dos trez, bastava permutar os objetos das combinações precedentes, o que daria:

12 13 23
21 31 32,

e juntar a cada rezultado o numero que ele não contivesse:

3 12 2 13 1 23
3 21 2 31 1 32

Portanto, o numero das combinações quando a taxa de grupamento equivale a' totalidade menos um, multiplicado pelo numero das permutações do grupamento, e' igual ao das permutações da totalidade.

Esta lei reduz a contagem das permutações de uma ordem às da ordem precedente, quando se conhece a das combinações.

Desde então ela faz depender a evolução do problema das permutações da solução do problema das combinações e do conhecimento do numero de permutações de dois objetos, que e' intuitivo.

A conveniente aplicação desta lei exige que se comece por determinar o numero de combinações na hipotese particular que ela encerra. A formula das combinações diretamente obtida nos mostra então que tal numero coincide com o da totalidade. Assim, por exemplo, o numero de combinações de 6 objetos 5 a 5 e' 6; o numero de combinações de 16 objetos 15 a 15 e' 16; e assim por diante.

Donde se conclue que o numero de permutações de uma ordem e' igual ao da totalidade multiplicado pelo numero das permutações da ordem precedente.

Chega-se assim a uma observação que já foi feita e da qual se deduz a formula habitual das permutações.

Obtida esta e conhecida a das combinações tem-se a dos arranjos.

Por tudo quanto precede vê-se que a instituição de qualquer contagem consiste em reduzir esta ao classamento.

7 — Teorema numerico que rezulta da lei das combinações.

A lei das combinações tendo a forma fracionaria e devendo dar resultados sempre inteiros, conduz a um teorema numerico assás importante pª ser notado aqui. Vê-se assim que: todo produto de fatores consecutivos, em numero qualquer, deve ser exatamente divizivel pelo de um numero igual de termos da serie numerica.

Seria diretamente impossivel apanhar essa relação alem de trez fatores.

No caso de dois fatores a lei é intuitiva, pois que, de dois numeros consecutivos, um é par.

No caso de maior numero pode-se verificar

indiretamente.

Assim, se forem trez fatores; admitamos que o primeiro não é divizivel por 3. Dará então um resto que só pode ser 1 ou 2. Se fôr 1, o primeiro fator será a soma de 1 com um multiplo de 3; o segundo fator será a soma de 2 com um multiplo de 3, e o terceiro será a soma de 3 com um multiplo de 3, isto é, um multiplo de 3.

O raciocinio seria analogo no caso do resto ser 2 e provaria que o segundo fator seria multiplo de 3.

Seria facil estender o raciocinio a esse numero de casos suficientes pª induzir a lei.

Mas essa verificação indireta não tem a fecundidade e não é tão filosofica como a que foi indicada por nosso Mestre.

Consiste esta em fazer recahir cada caso no precedente.

Pª isso, note-se que a formula das combinações pode decompor-se em duas, isolando e comparando os maiores fatores respetivos do numerador e do denominador.

Assim, por exemplo, o numero de combinações de 6 objetos 4 a 4 é dado pela fração

$$\frac{6 \text{ por } 5 \text{ por } 4 \text{ por } 3}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$$

Isolando e comparando os maiores fatores, 6 e 4, teremos:

$$\frac{6 \text{ por } 5 \text{ por } 4 \text{ por } 3}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4} \text{ igual a}$$

$$\frac{5 \text{ por } 4 \text{ por } 3}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3} \text{ multiplicado pela}$$

soma

$$1 \text{ mais } \frac{2}{4}$$

o que dá

$$\frac{5 \text{ por } 4 \text{ por } 3}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3} \text{ mais } \frac{5 \text{ por } 4 \text{ por } 3 \text{ por } 2}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$$

Isto é, o numero de combinações de 6 objetos 4 a 4 equivale á soma do numero de combinações de 5 objetos 3 a 3 com o numero de combinações de 5 objetos 4 a 4.

Abstrahindo, porem, do problema das combinações, p.a só considerar a constituição numerica das formulas, vê-se que as duas frações parciaes derivão da total, diminuindo separadamente de uma unidade, ora o numero, ora a grandeza, dos fatores do producto que se considera.

P.a comprehender convenientemente esse enunciado convem notar que a concepção das frações que ele abrange está ligada á dos numeradores. Pois que o numero dos fatores do numerador determina o numero de fatores do denominador; e conhecido esse numero, ficão esses fatores conhecidos.

Assim, na formula precedente, o numerador da primeira fração parcial obtem-se diminuindo de uma unidade o numero de fatores do numerador da fração primitiva; esta tinha 4 fatores e aquele tem 3. E note-se mais que o fator eliminado é o maior. Desde então o denominador da 1a fração parcial deve ter tres fatores.

O numerador da segunda fração parcial obtem-se diminuindo de uma unidade a grandeza de cada fator do numerador da fração primitiva;

6 torna-se 5; 5 torna-se 4; 4 torna-se 3; e 3 torna-se 2.
Mas, como o numerador contem 4 fatores, o denominador da segunda fração parcial não sofre alteração alguma. De sorte que, por decomposições sucessivas, chega-se a duas series de frações: uma serie em que o numerador de cada fração tem dois fatores, distintos ou não dos do denominador; outra serie em que o numerador tem maior numero de fatores, mas são todos identicos aos do denominador. As frações desta ultima serie reduzem-se, pois, á unidade, e as da primeira a um numero inteiro.

Em resumo, p.ª compreender o enunciado de nosso Mestre, convem ter presente o que nele ha de implicito.

Assim, desde que os fatores são consecutivos e se diminue o seu numero, só pode ser pela supressão do maior ou do menor. A supressão de qualquer dos intermedios quebraria a continuidade da serie. Em segundo lugar, é inutil mencionar qual o fator suprimido porque a consideração da formula mostra que só pode ser o menor.

Para tirar dessa formula toda utilidade que ela comporta, convem precisar melhor a significação concreta das alterações abstratas de que se trata.
Em primeiro lugar, vê-se que diminuir o numero de fatores equivale a diminuir a taxa de grupamento; e diminuir a grandeza de cada fator equivale a diminuir a totalidade dos objetos. De sorte que, á vista desta observação, pode-se dizer que a decomposição abstrata corresponde concretamente ao seguinte fato:

O numero de combinações é a soma das que se obtem diminuindo sucessivamente de uma unidade, já a taxa de grupamento, já a totalidade dos objetos.

Mas esse enunciado encerra implicitamente circunstancias que convem tornar explicitas. Quando se diz que se diminue de uma unidade a grandeza de cada fator, indica-se que a totalidade dos objetos diminue, e implicitamente que a taxa de grupamento conserva-se inalteravel, porque o numero de fatores não muda. Ao passo que, quando se diz que se diminue de uma unidade

o numero de fatores, indica-se que a taxa de grupamento diminue sem nada afirmar por isso acerca da totalidade. Como se sabe, porem, que o fator suprimido é o maior e que um fator é que concorre para a totalidade, a diminuição do numero de fatores implica a diminuição da totalidade. Isto não se daria se porventura o problema das combinações conduzisse á mesma formula, com a unica diferença de ser a totalidade representada não pelo maior, mas sim pelo menor dos fatores do numerador.

III

Consequencias desta teoria.

1 — Das diversas consequencias desta teoria.

Para terminarmos a apreciação filozofica desta teoria convem examinar as suas principaes consequencias. Elas são de duas ordens: umas especiaes, outras geraes. Como tipo das primeiras, nosso Mestre indica a teoria das repartições. Depois dela mencionaremos sumariamente as outras.

2 — Consequencias especiaes: teoria das repartições como tipo.

Chamão-se repartições, as diversas partilhas, binarias, ternarias, quaternarias, etc, que pode comportar um certo numero, sem excluir os termos nulos. Assim seja repartir tres objetos por duas pessôas; quantos modos comporta, admitindo que uma pessôa possa ficar sem nada? Teriamos:

1ª partilha { 1ª pessôa — 0 ; 2ª " — 3 } 2ª partilha { 1ª pessoa — 1 ; 2ª " — 2 }

3ª part. { 1ª pessoa — 2 ; 2ª " — 1 } 4ª part. { 1ª pessoa 3 ; 2ª " 0 }

Ao todo quatro repartições.

Suponhamos ainda 3 objetos a repartir por 3 pessoas. Teriamos:

1º tantas repartições em que a 1ª teria zero quantas são as repartições dos 3 objetos pelas outras duas.

2º tantas repartições em que a 1ª teria 1 quantas são as repartições de 2 objetos pelas outras duas.

3º tantas repartições em que a 1ª teria 2, quan=

tas são as repartições de 1 objeto pelas outras duas.
4º tantas repartições em que a 1ª tem 3, quantas são
as repartições de 0 objetos pelas outras duas.

Estes exemplos ao mesmo tempo que esclarecem
a definição do problema indicam como se pode
diretamente apanhar a lei segundo a qual
cada especie de partilhas se reduz á precedente.

Com efeito, supponhamos que se trata de partilhar 6
objetos por 4 pessoas, sabendo quantas partilhas dá
um numero qualquer de objetos por 3 pessoas.

Teriamos tantas repartições quantas fossem as
que correspondessem ás hipotheses de ter a 4ª
pessoa successivamente todas as quotas desde
0 até 6; a saber:

1º - 0 - tantas repartições quantas dessem os 6
objetos pelas 3

1ª 1 - Idem das 5 restantes pelas 3

1ª 2 - Idem das 4 restantes pelas 3

1ª 3 - Idem das 3 restantes pelas 3

1ª 4 - Idem das 2 restantes pelas 3

1ª 5 - Idem da 1 restante pelas 3

1ª 6 - Idem dos 0 restantes pelas 3

Assim o numero de repartições de 6 objetos por 4 pessoas equivaleria á soma das repartições de 6, de 5, de 4, de 3, de 2, de 1, de 0 por 3 pessoas.

Em geral: toda repartição equivale ao conjunto das aplicações da anterior ao numero que se quer destribuir e todos os que o precedem. Mas, esse conjunto pode ser disposto em dois grupos. Tomemos o nosso exemplo p.ª fixar as ideias.

O conjunto das repartições dos 6 objetos por 4 pessoas equivale á soma das repartições de 6 objetos por 3 pessoas de um lado e o conjunto das repartições de 5, de 4, de 3, de 2, de 1, de 0 por 3 pessoas de outro lado. Mas este ultimo conjunto, a saber, repartições de 5, de 4, de 3, de 2, de 1, de 0 por 3 pessoas equivale ao numero de repartições de 5 objetos por 4 pessoas.

Conclue-se d'ali que as repartições de 6 objetos por 4 pessoas equivale á soma das repartições de 6 objetos por 3 pessoas, com as repartições de 5 objetos por 4 pessoas.

Assim, o problema da repartição de 6 objetos por 4 pessoas, decompõe-se em dois problemas analogos que se obtem diminuindo de uma unidade, ora o numero das partes, ora o numero a partilhar. Ou, em geral: cada repartição torna-se a soma das que se obterão diminuindo separadamente de uma unidade ora o

numero de partes, ora o numero a partilhar.
Basta confrontar esta subordinação mutua com a que convem á lei das combinações para perceber a sua identidade completa. No caso das combinações, conforme vimos, o numero das combinações é a soma das que se obtem diminuindo separadamente de uma unidade ora a taxa de grupamento, ora a totalidade dos objetos.
A primeira lei de Filosofia Primeira nos leva, pois, a considerar a formula das repartições como sendo analoga á das combinações, isto é, como devendo consistir em uma fração cujo numerador seja o produto de fatores consecutivos, e o denominador, um numero igual de termos da escala numerica. A indução nos leva mesmo a reconhecer que o numerador depende do numero a partilhar, e que o denominador depende da taxa de partilha.
Resta-nos unicamente descobrir qual dos fatores do numerador, o menor ou o maior, é indicado imediatamente pelo numero a partilhar, e como o numero de fatores depende da taxa de partilha.
P.ª solução da 1.ª questão, basta refletir que o problema das repartições comporta a hipotese na qual nada se tem que

dividir por qualquer numero de pessoas. A solução consiste então em não dar cousa alguma aos partilhantes, isto é, a solução é uma unica p.ª todos os casos. A formula das repartições deve, pois, reduzir-se neste caso á unidade, o que exige que o seu numerador se torne igual ao denominador. Mas então os fatores do numerador formão uma serie crescente a partir do primeiro numero. Isto indica que no caso geral o menor fator será o numero seguinte ao que se deve partilhar.
Quanto ao numero de fatores, note-se que o menor valor de tal numero corresponde ao caso das repartições binarias. Ora, nessa hipotese, o numero de repartições é o numero imediatamente posterior ao que se quer dividir. Portanto a formula deve reduzir-se a um fator. Isto mostra que, no caso geral, o numero de fatores é o que precede á taxa de grupamento.
Nós estamos, pois, autorizados a considerar a formula das repartições como consistindo em dividir, por todos os termos da serie numerica até á taxa de partilha exclusive, o produto de um grupo igual de fatores consecutivos depois do numero a partilhar.
Não podemos desconhecer a legitimidade de uma

conclusão diretamente rezultante da identidade apanhada entre duas leis de subordinação, cada uma das quaes é necessariamente caraterística do caso correspondente, o que permite estender a um a regra do outro.

3.– Consequencia logica: exemplo do que os gregos chamarão analize.

A analize consistia em supor resolvido o problema, e combinar as grandezas pedidas com as incognitas, de modo a descobrir afinal uma ligação que permitisse subir das conhecidas ás desconhecidas.

4.– Consequencia filozofica. Relativismo de nossas construções. Consideração do numero de instituições que comporta a escala teorica.

5.– Importancia maior desses ensinamentos sobre os rezultados matematicos adquiridos.

6.– Necessidade da preponderancia do ponto de vista religioso pª disipar a indecizão.

7– Conclusão.

Redigida a 19 Archimedes 109 / 13 Abril de 1897 — R. Teixeira Mendes.

Ensino Pozitivista.

Logica

Calculo arimetico

8ª Lição

Teoria do calculo feticlico

(Adição, subtração e multiplicação dos numeros inteiros)

I

Concepção geral das avaliações.

1. Objeto da lição.

A numeração nos permite resolver os problemas mais simples que a apreciação da ordem universal nos propõe e que consistem em determinar os diversos gráus da coexistencia, abstrahindo dos atributos especificos dos objetos considerados: Mas, construida a escala arimetica o reconhecimento do grau que nela deve ocupar uma pluralidade seria sujeito a frequentes enganos, si tivessemos, em todos os casos, de efetuar uma contagem direta do conjunto. Alem disso em muitas circunstancias sabe-se como grupos parciaes contribuirão pª a formação do grupo total. E servindo-nos direta=

mente da escala arimetica p.a determinar este ultimo, cem-
chante dado ficaria sem utilização. A medida dá lugar a
observações analogas; porque a medida direta só rarissimas
vezes é exequivel. Na generalidade dos casos sabe-se pelo contrario
e só é possivel saber-se, como é que a grandeza que se deseja
medir depende de outras já medidas ou de facil medição.
Em todas estas hipoteses surge, pois, o seguinte problema geral:
conhecidos varios numeros e o modo explicito pelo qual desem
correm p.a formação de outro, determinar o ultimo, sem
efetuar uma contagem direta. A solução deste problema
constitue o objeto das avaliações. Vê-se, pois, que as ava-
liações se propõem a atingir o mesmo objetivo que a numeração,
seguindo uma marcha mais segura e mais rapida. Tal é o
campo das investigações numericas em que vamos entrar.
A' primeira vista elle parece indefinido, pois que as avaliações
podem variar indeterminadamente. Examinando, porem,
o assunto, a Humanidade reconheceu que a possibilidade de
coordena-lo resulta do fato de todas as avaliações se reduzirem
aos concursos mais ou menos repetido e mais ou menos variado
de um pequeno numero de avaliações. De sorte que um
dominio que parece inesgotavel quando se o considera no ponto
de vista objetivo, torna-se de facil condensação quando é aprecia-

do o aspeto subjetivo. Distinguindo, pois, as avaliações, em
compostas e simples ou elementares, o calculo arimetico
para reduzir-se ao estudo das operações que comportão
processos realmente distintos. Estas operações são em
numero de cinco, a saber: a adição, a subtração,
a multiplicação, a divisão e a extração da raiz qua-
drada
Elas formão historica e dogmaticamente duas ca-
tegorias; a primeira, devido ao feitichismo, compõe-se
da adição, da subtração e da multiplicação; a se-
gunda elaborada pela teocracia, é constituida pela
divisão, e a extração da raiz quadrada. A distinção
dogmatica entre esses dois grupos se patenteia compa-
rando a sua ligação com a numeração.
Desde a sua constituição primitiva a numeração utilizou
a adição e logo depois a subtração, conforme ainda hoje
atesta a numeração romana. A numeração sistema-
tica apenas manteve, porem, a primeira dessas operações.
Mas ela utilizou tambem a multiplicação e instituiu
mesmo a noção de potencia, enquanto esta não desse
lugar a nenhuma operação distinta. Na numeração
fundamental não foi utilizada, porem, nem a divisão,

nem a extração de raiz que só indiretamente se filião a ela. Com efeito, essas operações são o inverso das que a numeração utiliza.

Quando o desenvolvim.to teorico da Humanidade levou-a a representar numericamente a serie continua das grandezas, a divisão foi utilizada na constituição da escala numerica. Mas essa utilização é mais aparente do que real, pois que a escala dos numeros inteiros pode bastar para todas as hipóteses escolhendo um modo suficientemente pequeno.

Estas observações conduzirão a Humanidade a distinguir as operações elementares em diretas e indiretas (inversas). Semelhante distinção é puramente subjetiva, pois que, as operações elementares, podem todas ser diretamente concebidas, e comportão instituições diretas. As conveniencias humanas é que determinão a escolher umas para operações diretas, e desde então a classificar as outras como inversas.

Examinando os motivos que determinarão a considerar como diretas, a adição, a multiplicação, e a elevação à potencia, e como inversas a subtração, a divisão e a extração de raiz se reconhece a sua filiação à nossa constituição moral. Pois que as operações diretas caraterizão as noções simpaticas de união, de concurso, de convergencia, ao passo que as operações inversas definem as noções antipaticas da separação, da divergencia, da fragmentação. A influencia destes atributos morais é patente na constituição da escala numerica, cujos elementos tiverão todos uma origem simpatica, como vimos.

A escala numerica tendo utilizado a adição, a multiplicação e a elevação à potencia, a sua constituição oferece hoje um motivo teorico para a escolha das operações que devem ser consideradas como diretas.

P.a acabar os motivos dogmaticos que separão a divisão do grupo formado pela adição, pela subtração e pela multiplicação, convem apreciar agora a filiação geral das avaliações p.a com a escala arimetica.

Quando expuzemos esta escala mostramos que a sua constituição foi sobretudo solicitada pelas necessidades da avaliação e não da contagem. Mas a nossa atenção convergiu então especialmente p.a o fato de representação de todos os numeros possiveis. Devemos, pois, completar esta primeira indicação, observando que a estrutura da escala numeral mesmo visou mais o calculo

do que contagem. Com effeito, p.ra contar, quaesquer sinaes, fonicos ou graficos, serviriam como representantes dos numeros. A dificuldade de reter sinaes desconnexos só se faz sentir depois que eles se multiplicam muito. Ainda hoje vemos na numeração falada, a maneira das pessoas não ligarem aos nomes dos numeros nenhuma idéia de filiação. Mas quando se trata do calculo, sente-se logo a importancia de representar todos os numeros por alguns suficientemente pequenos e combinados de maneira mais simples. Pois que, desde então, a estructura da escala numerica já reduz espontaneamente qualquer calculo da combinação dos numeros por meio dos quaes todos os mais são formados.

Assim a numeração sistematica, representando um numero qualquer como decomposto em potencias sucessivas da base, afetadas cada uma de um coeficiente inferior a sete, já reduz as avaliações ás combinações dos seis primeiros numeros. Ora, si essa decomposição não estivesse efetuada sem equivalente, constituiria a maior dificuldade de cada avaliação. É o que se pode reconhecer vendo qualquer calculo feito segundo a notação usada pelos gregos, mesmo depois dos esforços de Archimedes e Apolonio

Vê-se assim a importancia da instituição teocratica da numeração: Si os numeros fossem representados por sinaes arbitrarios, nenhum calculo poderia ser efetuado senão pela contagem imediata. Ora, essa contagem não pode efetuar-se com segurança senão p.a numeros suficientemente pequenos.

Graças á constituição teocratica da numeração a contagem direta fica reduzida a esses casos mais sensiveis.

De sorte que as avaliações são constituidas fazendo sucessivamente recahir os casos mais complicados nos mais simples até que a avaliação se torna simples p.a que o seu resultado seja determinado pela contagem imediata.

A constituição da escala numerica teocratica guia na serie de decomposições graduaes. Ora, conquanto um grande intervalo separe a multiplicação do conjunto formado pela adição e a subtração, a apreciação que fazemos da multiplicação mostrará que ela não tem ser separada da apreciação das ultimas na exposição didatica. A maneira pela qual a numeração assiste ás tres operações é essencialmente a mesma, o que não

acontece p.ª com a divisão. Tal é o motivo pelo qual a nossa lição de hoje abraçará o conjunto do calculo fetichico. Antes, porem, de abordá-lo devemos assinalar o plano geral do estudo das avaliações. Nosso Mestre designou a lição seguinte p.ª a divisão e as tres seguintes p.ª o estudo do calculo fracionario. Desde então, uma lição abraçará a teoria da raiz quadrada e as duas consecutivas caraterizarão a generalisação do espirito arimetico, apreciando as simplificações que comportão os casos favoraveis ás ampliações compostas. A nossa lição final resumirá o estudo feito e constituirá assim uma introdução p.ª o estudo do calculo algebrico.

II

Teoria da adição e da subtração.

1 – Concepção direta da adição
2 – Realização direta da adição por contagem
Impossibilidade pratica.
3 – Operação sistematica.
Caso em que a operação faz-se por contagem
Caso em que existe realmente a operação adição
Vantagem de fazer a operação começando pelas unidades inferiores. Aperfeiçoam.to pelo calculo mental.

4 – Concepção da subtração, primeiro como operação direta, e depois como o inverso da adição.
resto, excesso, diferença
5 – Realização da operação pela contagem
1º como operação direta
2º " " inversa da adição.
Impraticabilidade geral.
6 – Operação sistematica. (consiste em fazer a operação recahir em outras em que o resto é numero simples)
Caso em que a operação não se pode deixar de fazer pela contagem, (quando o resto é numero simples).
Caso em que existe realmente uma operação distinta da contagem – (basea-se na decomp.ão instituida pela num.ão)
1º Processo como operação distinta da adição.
a) caso em que todos os algarismos do minuendo são maiores do que os do minuidor (é o caso em que a decomp.ão instituida pela numeração auxilia imediatamente)
b) caso em que esta hipotese não se verifica (auxilia indiretamente)
P.ª efetuar a subtração parcial concernente a um algarismo do minuidor maior do que o seu correspondente do minuendo, decompõe-se a operação em duas. Tira-se em primeiro lugar a parte do minuidor equivalente ao algarismo

correspondente do minuendo, e depois, tira-se de uma unidade da ordem imediatam.^te superior o que falta.

Ex: tirar 356 de 524

Não sendo possivel subtrair de 4 o numero 6, nota-se que 6 tirando quatro ficão 2, e que portanto, p.ª tirar 6 é preciso tirar 4 e depois 2. Ora de 4 tirando 4 fica zero. Resta tirar 2. Considera-se p.ª isso o algarismo imediato 2, e dele tira-se 1, que vale 10 de primeira ordem; destes 10 tirão-se os 2 e ficão 8 p.ª primeiro algarismo do resto. P.ª tirar 5 de 1 faz-se o mesmo. Nota-se que tirar 5 é o mesmo que tirar successivamente 1 e 4. De 1 tirando 1 fica zero. Tira-se uma unidade da ordem seguinte (5) que vale 10 de 2ª ordem. Tirando desses 10 os 4 que faltão fica o resto 6 p.ª segundo algarismo do total. Finalmente de 4 se tira 3 e fica 1. De sorte que o resto total será 168

Processo fazendo intervir a adição.

1º modo: mesmo exemplo: Não podendo tirar 6 de 4, toma-se uma unidade da ordem imediatamente superior (2) que vale 10 da ordem que se está considerando. Tirando desses 10, 6, obtem-se p.ª resto 4 que somado com os 4 que ficarão intactos no primeiro algarismo do minuendo dará 8 p.ª primeiro algarismo do resto total. Pelo mesmo motivo, p.ª tirar 5 de 1, toma-se 1 da ordem seguinte (5), deste 1 ou 10 tira-se 5; obtem-se 5 que somado com com o 1 ficado intacto dá 6 p.ª 2º algarismo do resto total. Enfim de 4 tira-se 3 e tem-se enfim, p.ª resto total 168, como ha pouco.

2º modo = mesmo exemplo. Depois de tomada uma unidade da ordem immediata, soma-se com o algarismo da ordem considerada 4, o que dá 14 e de 14 tirando 6, tem-se p.ª 1º algarismo do resto 8. Pelo mesmo motivo somão-se as 10 que vem da 3ª ordem com a 1 que existe na 2ª, o que dá 11 e tirando destes 11, 5, fica 6 p.ª 2º algarismo do resto total. Tirando finalmente de 4, o ultimo algarismo do minuidor (3) tem-se enfim 168 p.ª resto total.

Equivalencia dos dois modos.

2º Processo. Da subtração como o inverso da adição.

a) todos os algarismos do minuendo maiores do que os do minuidor. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 543 \\ \underline{321} \\ 222 \end{array}$$

Numero que somado com 1 dá 3 é 2
" " " 2 " 4 " 2
" " " 3 " 5 " 2

b) caso em que isto não se verifica

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 524 \\ \underline{346} \\ 178 \end{array}$$

Numero de um só algarismo que somado com 6 dá um numero que acaba em 4 é 8 – 6 e 8 = 14. O 1 de 14 juntar-se-ia a 4 o que dá 5. O numero de um só algarismo que somado com 5 dá um numero que acaba em 2 é 7 – 5 e 7 = 12. O 1 de 12 juntar-se-ia a 3 o que dá 4. Numero que somado com 4 dá 5 é 1.

3.º processo. Juntando a ambos os termos o mesmo numero, isto é, uma unidade da mesma ordem.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 524 \\ 346 \\ \hline 178 \end{array}$$

Junta-se 10 a 4 o que dá 14 e dahi tira-se 6, o que dá 8 p.ª 1.º algarismo do resto total. Junta-se então 10 ou 1 de 2.ª ordem a 4 que fica sendo 5 e tira-se esse 5 do minuendo. Como não é possivel, repete-se o m.mo artificio. Junta-se 10 de 2.ª a 2 o que dá 12 e dahi tira-se 5 o que dá 7 p.ª 2.º algarismo do resto. Junta-se então 10 de 2.ª ou 1 de 3.ª a 3, o que dá 4 que se tirão de 5, e obtem-se o ultimo algarismo do resto total.

7 – Da adição como o inverso da subtração. Comparação da adição com a subtração quanto á facilidade.

III

Teoria da subtração.

1 – Concepção arimetica da multiplicação.

Filiação p.r com a numeração.

Comparação com a divisão.

Filiação p.r com a adição.

2 – Generalização. Problema das series.

3 – " da Multiplicação. Potencias. Productos indefinidos. Anarchia academica.

4 – Necessidade de ordenar a multiplicação em relação ao multiplicador.

5 – Distinção dos casos.

1.º Multiplicador simples.

2.º " potencia da base numeral.

3.º " multiplo das potencias da base.

4.º Caso de multiplicador qualquer.

6 – Marcha do Calculo. Ordem das multiplicações: porque convem começar determinação do producto das unidades inferiores do multiplicando.

Indifferença quanto ás unidades do multiplicador.

7 – Conclusão.

Influencia dos fatores no producto. Observação sobre a constancia do producto quando se invertem os fatores. Explicação da frequencia, intensidade.

da indeterminação que rezulta da variação inversa dos fatores.

Conclusão religioza.

Ensino Positivista.

Lógica.

Calculo aritmetico.

9ª Lição.

Instituição fundamental do calculo teocratico.

(divizão dos numeros inteiros)

I

Concepção da divizão.

1 _ Instituição historica da divizão.

As operações que estudamos na ultima lição forão instituidas pª rezolver trez problemas concretamente distintos. Cada uma delas conduziu a um processo abstrato especial, que não suscita a minima diferença quer se trate das grandezas descontinuas, quer se considere as grandezas continuas. Todas elas supõem a existencia de trez numeros, dos quaes dois são dados ou conhecidos e o terceiro é pedido ou incognito. A determinação desse numero incognito é sempre possivel e não exige então a consideração imediata dos numeros dados. Mesmo na subtração onde o rezultado da operação tem

tres denominações (resto, excesso, diferença) essas tres denominações se identificão sem dificuldade. E como, no ponto de vista concreto jamais se pode propôr o problema de tirar uma grandeza maior de uma menor, o problema da subtração é sempre tão possivel como o da adição e o da multiplicação. Finalmente na instituição sistematica das tres operações, o caso geral recahe no caso fundamental mediante a decomposição dele em operações elementares que são simultaneamente consideradas e podem ser executadas em qualquer ordem. É esse conjunto de propriedades que explica porque razão taes operações forão instituidas sistematicamente desde o periodo fetichista.

Hoje devemos começar a apreciação do calculo teocratico estudando a sua instituição fundamental a divisão dos numeros inteiros. Similhante operação offerece os mais profundos contrastes com o conjunto das anteriores, ás quaes ela não se póde filiar senão dificilmente. Pois que a filiação mais simples, em relação á multiplicação, só se torna facil depois que se concebe a multiplicação como caraterizando a lei que prende a area de um retangulo aos seus lados. E a filiação em relação á adição e á subtração exige raciocinios já consideraveis. Todos esses contrastes sobresahirão examinando as condições que levarão a instituir a divisão.

A Humanidade foi conduzida á divisão mediante a consideração de tres problemas que successivamente se representarão no decurso da evolução. O primeiro desses problemas se offerece desde o fetichismo inicial; mas é que devemos considerar em ultimo lugar. A necessidade de manter a continuidade dogmatica determina a considerar a divisão segundo o ultimo dos problemas que conduzirão a ela. Esse problema é o inverso da multiplicação, e consiste em dado um produto e um dos fatores saber o outro. Mas o exame desse problema aperfeiçôa a apreciação historica fazendo sobresahir a origem sacerdotal da divisão. Para comprehende-lo convem indicar previamente a origem geometrica da multiplicação. Pois que só essa origem conduziu ao problema inverso da multiplicação, e a instituição da geometria foi devida ao sacerdocio fetichocratico, cabendo o seu surto ás castas teocraticas.

1º – Instituição da divisão como o inverso da multiplicação. A geometria conduzio á multiplicação quando os teocratas se preoccuparão o problema de referir o conhecimento da superficie do retangulo ao do quadrado. Os sacerdotes

primitivos notárão que esta avaliação éra possivel todas as vezes que se conseguia medir os lados do retangulo por um modulo. Pois que, nessa hipotese, tirando pelos pontos de divisão de um dos lados retas paralelas ao outro lado, o retangulo ficaria dividido em quadrados que tinhão p.ª lado o modulo. Tudo se reduziria a saber quantos desses quadrados se continhão no retangulo. Ora esse numero pode ser encarado como dependendo da medida dos lados por varios modos. Assim, p.ª fixar as idéias, imaginemos um retangulo cujos lados sejão representados pelos numeros 5 e 16. Pode-se avaliar o numero de quadrados nele contido somando 16 (que é o n.º de quadrados da fileira superior) com 4 (que é o n.º de quadrados da 1.ª coluna da direita, não contado com o quadrado dessa coluna já incluido na fileira superior) com 15 (que é o n.º de quadrados da fileira inferior menos o quadrado incluido na 1.ª coluna da direita) com 3 (que é o n.º de quadrados da 1.ª coluna da esquerda menos os dois já incluidos nas fileiras consideradas) com 14 (n.º de quadrados da 2.ª fileira superior menos os dois já incluidos nas colunas extremas) com 2 (n.º dos quadrados que restão por considerar na 2.ª coluna da direita) com 13 (quadrados que restão a considerar na 2.ª fileira inferior) com 1 (quadrado que resta a considerar na 2.ª coluna da esquerda) com 12 (quadrados que restão da ultima fileira a considerar).

$$16+4+15+3+14+2+13+1+12$$

ou

$$16+15+14+13+12+1+2+3+4$$

Examinando outros retangulos seria facil apanhar a lei de filiação dos dois grupos de parcelas; mas esse exame é inutil p.ª o fim que temos em vista. Podia-se começar pelo lado menor. Podia-se somar os quadrados segundo as paralelas á transversal que partindo de um dos vertices separa no retangulo um triangulo isosceles. A area seria dada então no nosso exemplo pela soma:

$$1+2+3+4+5+5+10+5+4+3+2+1$$

Mas a maneira mais simples de avaliar o n.º de quadrados contidos na superficie do retangulo consiste em fazer a soma dos quadrados segundo as fileiras ou colunas. P.ª isto, basta observar que o numero de quadrados de uma fileira ou de uma coluna é o mesmo que o n.º que representa o lado respetivo; e que o n.º de fileiras ou de colunas é o n.º que representa o outro lado. Vê-se assim que a area do retangulo é representada por um produto em que os fatores são os lados do retangulo. Da dupla maneira de considerar os dois fatores como representando o multiplicando ou o multiplicador

mostra logo que a ordem dos fatores não altera o produto.

Isto posto, compreende-se que m.tas vezes surgiria, como hoje, o problema que consiste em determinar um lado de um retangulo q.do fosse conhecida a area e outro lado. O que abstratamente significa:

Dado um produto e um dos fatores achar o outro.

A solução espontanea deste problema consiste em ensaiar os n.os multiplicando-os pelo fator conhecido até achar um produto igual á area. Esse processo é suscetivel de aperfeiçoamentos. Mas não devemos considera-los agora. Vejamos como, partindo deste problema se reconhece a sua identificação abstrata com os dois outros que derão origem á divisão.

O produto sendo dado e um dos fatores, podemos imaginar duas hipoteses: α) ou esse fator representa o multiplicando; β) ou representa o multiplicador. Se o fator conhecido representar o multiplicando, o produto pode ser considerado como uma soma de parcelas iguaes a ele; e o fator incognito será então o n.º das parcelas. Portanto p.a determinar o fator desconhecido basta saber quantas veges o fator dado se contem no produto. P.a isso podemos seguir dois processos: α) ou somar o fator conhecido comsigo mesmo até achar

o produto; β) ou tirar o fator conhecido do produto em quanto fôr possivel. Seja qual fôr o processo seguido, o problema equivale a ver q.tas vezes um numero se contem em outro.

Se, porem, o fator dado representar o multiplicador, o produto pode ser considerado como uma soma de parcelas iguaes na qual se conhece o numero de parcelas, e se ignora o valor de cada parcela. Portanto o produto se representa como sendo suscetivel de ser dividido em tantas partes iguaes q.tas são as indicadas pelo fator dado; e o fator desconhecido é o valor de cada uma das partes. Isto é, o problema neste caso recahe no seguinte: dividir um numero em tantas partes iguaes quantas são as indicadas por um outro. A solução espontanea será adiante indicada.

3 — Instituição da divisão pelo segundo problema.

Antes, porem, desse surto da geometria terrena, já a astrolatria tinha conduzido a necessidade de instituir sistematicamente a divisão partindo de outro problema. Com efeito, a adoração dos astros determinou a contemplação assidua deles; e essa contemplação fez descobrir os movimentos proprios do Sol e da Lua em sentido oposto

ao movimento geral do oriente p.a occidente. Mais tarde esta contemplação revelou que entre os astros a principio confundidos com as estrelas havia alguns que tinhão movimentos proprios como o Sol e a Lua. Esses obtiverão naturalmente maior importancia que as estrelas. E quando a teologia substituiu ao fetichismo, os deuses desses astros como mais inaccessiveis, mais misteriosos, adquirirão maior consideração mesmo do que o do Sol e da Lua.

A posição relativa dos astros tornando-se do maximo interesse, procurou-se prever diversos aspetos. P.a isto era preciso conhecer o tempo das revoluções sideraes dos planetas, isto é, o tempo que leva um planeta para voltar a mesma estrela. Mas esse tempo pode ser calculado por meio dos anos sinodicos respetivos. Chama-se ano sinodico de um planeta o tempo que leva o Sol p.a achar-se na mesma posição em relação ao planeta.

Isto posto, considerando uma certa posição em relação ao Sol, um planeta como Jupiter que está mais distante do Sol do que a Terra, os teocratas notárão que, quando o Sol já tinha concluido a sua revolução anual, Jupiter apenas tinha percorrido alguns gráus do seu circulo. De sorte que o Sol no fim de alguns dias depois de ter

começado o novo ano achava-se na mesma posição em relação a Jupiter. Assim o ano sideral do Sol suposto de 360 dias; o que fez dividir o circulo em 360 partes iguaes, supondo que o movimento do Sol era uniforme. Cada uma dessas partes foi o que se chamou o gráu. O ano sinodico de Jupiter pareceu ser de 390 dias; e como o planeta só tinha percorrido uma parte do seu circulo, segue-se que nesses 390 dias ele andou o numero de gráus indicado pela diferença entre 390 e 360 ou 30 gráus. Isto posto, admitindo que o movimento de Jupiter era uniforme, os teocratas fizerão o seg.te raciocinio: Se em 390 dias Jupiter anda 30 gráus de seu circulo, p.a andar os 360 gráus levará tantas vezes 390 q.tas vezes 360 contiver 30. Portanto o problema reduz-se a dividir 360 por 30 e multiplicar o quociente por 390; ou, o que dá no mesmo, multiplicar os dois tempos 360 e 390 e dividir o produto pela sua diferença 30. (A revolução de Jupiter é de 12 anos e não 13 anos como esse calculo faria supor). Se se tratasse de planetas como Mercurio ou Venus, mais proximos do Sol do que a Terra, se veria que eles não podem realizar uma revolução em torno da Terra em prazo mais curto do que o Sol. De sorte que quando o Sol se achar,

em relação a eles, em uma posição identica áquela em que se achava no começo do anno, já eles descreverão o seu circulo proprio e mais um certo numero de gráus. P.a calcular pois, a revolução sideral em torno da Terra, um raciocinio analogo ao precedente indica que se deve dividir o producto dos tempos considerados (anno solar e anno sinodico) pela soma dos mesmos tempos.

Depois de ter percorrido a sua orbita ou 360°, Venus tem que andar mais tantos gráus quantos o Sol tiver andado depois da conjunção considerada p.a encontra-la de novo; isto é, tem de andar o numero de gráus indicado pelo anno sinodico, seja 580 dias ou gráus. Portanto, em resumo, Venus andou 360°+580° em 580 dias; percorreu, pois, um gráu em 580 divididos por 360+580. A sua revolução será, pois, de $360 \frac{580}{360+580} = \frac{360 \times 580}{360+580}$.

Comprehende-se por ahi como a astrolatria conduziu a outros casos em que o problema exigia a determinação do numero de vezes que um numero se continha em outro. Agora é facil de ver como este problema recahe nos dois que acima vimos. Porque p.a saber quantas vezes uma grandeza se contem em outra, quando as duas estão avaliadas, o processo espontaneo consiste em tirar a menor da maior; do resto tornar a subtrahir a menor; do resto, tornar a subtrahir a menor; e assim continuar em q.to fôr possivel. Contando o numero de subtracções ter-se-á o quociente pedido, ou o quociente e um resto menor do que a menor das grandezas.

Este modo de comparar duas grandezas referindo o conhecimento de uma ao conhecimento da outra é o que se chama determinar a relação geometrica por contraste com a comparação por subtracção que se denomina relação arimetica. A distincção entre ambas é que na relação geometrica ou quociente uma das grandezas fica determinada por meio da outra sem referencia a nenhum outro modulo. Ao passo que na relação arimetica ou diferença uma grandeza fica determinada por meio da outra mas com o auxilio do modulo. Mas uma vez instituida pelas subtracções successivas a solução do problema que consiste em achar a relação entre dois numeros, isto é, quantas vezes um se contem no outro, se reconhece que um dos numeros pode ser considerado como decomposto em tantas partes iguaes ao outro quantas são as unidades do quociente. De sorte que o problema de

ver q^tas vezes um numero se contem em outro equivale a dividir um numero em tantas partes iguaes q^tas são as unidades do quociente.

O divisor, porem, neste caso indica não o numero das partes, mas o valor de cada parte. Finalmente a solução mostra que o numero maior pode ser considerado como uma soma de parcelas iguaes ao menor, o numero das parcelas sendo iguaes ao quociente pedido. Esta observação fornece na adição um processo de avaliação do quociente ao m^mo tempo que mostra que o maior dos numeros pode ser considerado como um produto de que o menor e o quociente são os fatores. Ao m^mo tempo que a astrolatria conduzia a encarar o problema da determinação da relação entre as grandezas, a instituição da geometria fornecia novas aplicações deste problema e conduzia a achar uma representação concreta para a multiplicação conforme já indicamos.

4- Advento fetichico da divisão.

O ato de separar, de dividir é elementar nas condições de nossa existencia. É á essa necessidade que corresponde o instinto destruidor. E esta observação serve p^a mostrar que similhante ato se liga mais a existencia individual do que o ato de ajuntar, dependente do instinto construtor. O fenomeno fundamental da vida, a alimentação, realiza-se separando os objetos do conjunto de que eles fazem parte. Mas na operação caraterizada pelo vocabulo divisão não existe só a ideia geral de separação, de decomposição; essa ideia existe tambem na subtração, como existe na extração de raiz.

A divisão supõe a decomposição de uma grandeza em partes iguaes. Ora, examinando as condições que levarão a Humanidade a pôr-se similhante problema, reconhece-se:

1º que ele supõe um certo ascendente do altruismo, como o indica por contraste a fabula da partilha feita pelo leão.

2º que esse problema devia oferecer-se desde épocas imemoriaes, na repartição das despojas dos vencidos entre os vencedores.

Similhante modo de partilha não podia aplicar-se sinão aos grupos de objetos similares, como prisioneiros, rebanhos, armas, etc. Quanto ás outras presas, o altruismo inspirou outros meios de repartição pac-

fica, sobretudo a sorte, isto é, a consulta ao destino.
Vê-se aqui um tipo da sabedoria humana, combinando a racionalidade com o empirismo, e o ascendente do altruismo. No ponto de vista moral a combinação da resignação á fatalidade com a intervenção da vontade.

Assim, a primeira ~~grandeza em um~~ noção da divisão ~~certo nu-~~ resultou ~~deste~~ problema:

Dividir uma grandeza em um certo numero de partes iguaes.

O problema se poz, por sua natureza, em relação ás pluralidades, isto é, as grandezas descontinuas. Quando se trata das grandezas continuas, o problema geral offerece dificuldades insuperaveis em casos que parecem simples; Ex: divisão de um arco de circulo.

Pa bem avaliar dessa dificuldade convem distinguir a divisão empirica da divisão sistematica das grandezas continuas. Empiricamente, considerando o caso das linhas, o problema reduz-se a dividir uma corda do mesmo comprimento. Essa divisão é facil quando o divisor é uma potencia de 2, porque se efetua por metades sucessivas. Mas fóra desse caso as dificuldades

são tanto maiores quanto mais elevado é o divisor.
Neste caso ainda convem notar que a dificuldade se reduz-se aos divisores primos, os outros casos podendo sempre recahir nesta hipotese.

Todas estas considerações nos mostrão que o problema da divisão surgiu historicamente da decomposição de um grupo em grupos iguaes. Se as grandezas continuas estão avaliadas, a divisão dellas em partes iguaes entra no caso da divisão das pluralidades.

5ª Solução inicial do primeiro problema que conduziu á divisão.

Posto este problema, a solução mais simples consiste em efetuar uma serie de partilhas, dando de cada vez um objeto a cada um dos associados. Assim, suponhamos que se trata de dividir 42 objetos (numeração setimal) por 6 pessoas. Distribue-se primeiro um objeto por cada uma das 6 pessoas. Feito isto, ficarão 42 menos 6 objetos, isto é, 33 objetos por dividir. Faz-se uma segunda distribuição pelas 6 pessoas, o que equivale a tirar 6 de 33. Ficão pois ainda 24 objetos a repartir. Faz-se uma ~~quarta~~ terceira partilha, ficão 15 objetos. Faz-se uma quarta partilha, ficão 6 objetos que se

distribuem exatamente pelas 6 pessoas.

3 – Aperfeiçoamento primitivo dessa solução.

Durante um periodo imemorial o problema da divisão não inspirou outra solução essencial. Apenas qdo. o grupo dos objetos a partilhar fosse muito grande relativamente ao numero de associados, era natural que ocorresse o distribuir-se de cada vez mais de um objeto, pa. tornar a divisão mais rapida. É todavia de presumir que esse expediente só foi lembrado mt. tarde.

Em todo caso, desde que o dezenvolvimento da vida social tivesse conduzido á instituição sistematica das tres operações fetichicas, é de presumir que se procurasse observar, digo abreviar a divizão, utilizando-se delas. Eis aqui os raciocinios que podião ter guiado o primitivo sacerdocio fetichocratico.

Examinando o processo espontaneo, reconhece-se que o valor de cada quota é igual ao numero das distribuições parciaes. Desde então o problema da divisão reduz-se a determinar quantas distribuições são possiveis. E, como pa. cada destribuição se tira o divisor do dividendo uma vez, segue-se que o quociente será representado pelo numero de vezes que se puder efetuar tal subtração.

Assim, o problema de dividir um numero em uma certa quantidade de partes iguaes, equivale a determinar quantas vezes o numero das partes se contem no numero dividendo.

Esta observação conduz logo a efetuar a divisão mediante uma serie de subtrações, tirando do dividendo o divisor; deste resto, tornando a tirar o divisor, do novo resto, tornando a tirar o divizor; e assim sucessivamente, até que a operação se acabe. Isto posto, contando o numero de operações tem-se o valor do quociente.

Refletindo sobre o quadro dessas operações vê-se que o dividendo póde ser considerado como uma soma de parcelas iguaes ao divisor, o quociente indicando o numero das parcelas.

Dahi rezulta um novo processo pa. achar o quociente, Somando o divizor comsigo mesmo tantas vezes quantas fôrem necessarias pa. obter o dividendo. O numero das parcelas dará o valor de cada parte. Mas, a importancia principal

(Passa pa. o caderno suplementar)

mento da iniciação:

Vossas Mães vos fizerão descer até hoje pelo amor à Fé; na _fase episodica_ que ides atravessar Nosso Mestre vos fará, por nosso intermedio, subir novamente pela fé até o Amor, onde deveis para sempre repousar no serviço da Familia, da Patria e da Humanidade.

Rio, 18 de Homero de 109 / 15 de Fevereiro de 1897.

de um regimen politico que concilie as justas reclamações do Proletariado ácerca do emprego social do capital, com a digni= dade do Patriciado indispensavel á producção, conservação e distribuição do mesmo capital.

Conclusão: a solução do problema moderno depende portanto da vulgarisação da nova doutrina. Tal é o objeto do ensino Positivista.

II

Destino do ensino positivista.

O ensino dogmatico forma um dos elementos da solução do problema moderno, pois que tem por fim completar a educação recebida no lar durante a 1.ª e a 2.ª infancia, desenvolvendo e sistematisando os seus resultados. Dahi concluimos que esse ensino deve ser ao mesmo tempo simpatico, sintetico e sinergico. Ao sacerdote compete a sistematisação desses resultados, por estar no ponto de vista geral e reunir estas trez condições: simpaticas, sinteticas e sinergicas.

III

Plano geral do ensino Positivista.

O objeto religioso de nossos pensamentos é conhecer a Humanidade, afim de mais amá-la e melhor servi-la.

O amor e o serviço da Humanidade exigem de nossa parte resignação e ação; resignação ás condições immodificaveis e ação para aperfeiçoar o que nos fôr accessivel. Mas a propria resignação bem conside= rada, suppõe a ação, porque exige um esforço sobre nós para fazer prevalecer os instintos altruistas, que nos inclinão á obediencia, sobre os instintos egois= tas, que nos impelem á revolta. Dahi se conclue que a distincção entre os conhecimentos teoricos (sacerdocio) que nos habilitão para a resignação e os conhecimentos praticos que nos preparão para a ação, reduzem-se no fundo á distincção entre os conhecimentos que tem por objeto a ação sobre nós e os conhecimentos que se referem á ação sobre a Terra.

Conclusão:

O ensino enciclopedico limita-se a desenvolver e sistematisar a cultura no lar com o fim de me= lhor adapta-la á existencia domestica, civica e planetaria.

É isto que indica a formula final do sacra=

nos faça conhecer as influencias a que está sujeita a nossa vida. O problema de educação sistematica consiste, pois, em adaptar o homem á sociedade em que ele surgiu, tomando p.ª base a grande modificabilidade dos fenomenos humanos. Por isso, como todas as sociedades variam conforme os tempos e os lugares, isto é, segundo o estado de civilização, o problema da educação moderna não é o mesmo que o problema da educação antiga. Assim a sociedade antiga sendo guerreira a educação consistia, quer se tratasse do regimem militar conquistador, com os Romanos, ou do regimem militar defensivo, no tempo do Catolicismo, em preparar os homens p.ª a guerra. Hoje, porem, que o regimen da sociedade é pacifico, o problema da educação consiste em habituar o homem a viver em um regimem politico, mediante o ascendente da fraternidade universal, a preponderancia intellectual da sciencia e da arte, e o predominio da atividade industrial.

Esse problema da educação não pode ser resolvido por nenhuma das Religiões precedentes, mesmo pelo proprio Catolicismo, porque, conquanto elas pregassem que todos os homens erão irmãos, na realidade, aqueles que não partilhavão das mesmas crenças eram considerados pelos outros como inimigos, e por conseguencia não podia existir verdadeira fraternidade universal. Como essas Religiões theologicas referião tudo a entes extra-terrestres e portanto não era possivel existir a preponderancia intellectual da sciencia e da arte. Quanto á atividade, era militar. Mas conquanto essas diversas Religiões não tivessem trabalhado diretamente p.ª a realização do problema da educação moderna, elas contribuirão em g.de parte para essa realização, pois que desenvolverão todos os nossos pendores altruistas, facilitando assim a realização dessa educação.

A solução positivista do problema moderno consiste na instituição da Religião da Humanidade, mediante:

A) o exercicio sistematico dos instintos altruistas, em virtude do culto pessoal, domestico, e publico de todos os afetos humanos que nos habilitão p.ª a vida social; B) a organisação da opinião publica, mediante a livre aceitação de uma fé, sempre <u>demonstravel</u> porem raramente <u>demonstrada</u>, mesmo aos mais instruidos, que satisfaça ao mesmo tempo ás aspirações morais da Mulher, ás tendencias especulativas (estheticas, filosoficas e scientificas) dos teoristas, e ás preocupações industriaes dos praticos; (c) o estabelecimento

Rezumos das conferencias sobre o Ensino Positivista

1ª lição –

Objeto, destino e plano geral do ensino positivista.

O ensino positivista tem por fim habilitar o homem a amar, conhecer, e servir a Humanidade, o que é espontaneamente realizado em virtude das leis de nossa organização individual e coletiva. Assim nós temos orgãos que nos levão a amar, orgãos que nos levão a pensar e orgãos de atividade. E quanto mais nós desenvolvermos essas faculdades altruistas, em virtude das leis de hereditariedade, mais aptos serão de amar, conhecer e servir, aqueles que nos sucederem.

Todo homem por ter nacido numa certa sociedade recebe uma educação instintiva que, como vae se tornando cada vez mais insuficiente a medida que os phenomenos humanos vão se complicando, é necessario uma intervenção sistematica que